

## ∞ Baccalauréat C Rennes septembre 1976 ∞

### EXERCICE 1

1. Étudier les variations de l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

2. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Écrire l'expression de  $f^{-1}$  (on pourra effectuer le changement de variable défini par  $e^x = X$ ).
3. Déterminer la fonction dérivée de  $f^{-1}$  et calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt.$$

### EXERCICE 2

Soit  $A$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des applications de  $[0; 2[$  dans  $\mathbb{R}$ .  
 $f_1, f_2, f_3, f_4$  les éléments de  $A$  définis par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - x \\ f_2(x) &= |1 - x| \\ f_3(x) &= E(x) \\ f_4(x) &= x \cdot E(x) \end{aligned}$$

$E(x)$  désignant la partie entière de  $x$ .

1. Montrer que  $(f_1, f_2, f_3)$  est un système libre.
2. Montrer que  $f_4$  appartient au sous-espace vectoriel engendré par  $f_1, f_2, f_3$  et calculer les composantes de  $f_4$  dans la base  $(f_1, f_2, f_3)$ .

### PROBLÈME

Le plan affine euclidien  $\mathcal{E}$  étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

À tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x; y)$  on associe le nombre complexe  $z$  affixe de  $M$ .

#### Partie A

1. Soient deux points  $M_1$  d'affixe  $z_1$  et  $M_2$  d'affixe  $z_2$ ; montrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à la même demi droite d'origine  $O$  si et seulement si

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

(on pourra par exemple écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique).

2. En déduire que trois points  $M_1$  d'affixe  $z_1$ ,  $M_2$  d'affixe  $z_2$  et  $M_3$  d'affixe  $z_3$  sont sur la même demi droite d'origine  $O$  si et seulement si :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

#### Partie B

Soient  $A_1, A_2$  et  $A_3$  trois points dont les affixes  $a_1, a_2, a_3$  vérifient :

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$$

Montrer que  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre  $O$  si et seulement si  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ . (On pourra considérer l'isobarycentre des points  $A_1, A_2$  et  $A_3$ ).

### Partie C

Soient  $B_1, B_2$  et  $B_3$  trois points dont les affixes  $b_1, b_2, b_3$  vérifient  $\frac{b_1}{|b_1|} + \frac{b_2}{|b_2|} + \frac{b_3}{|b_3|} = 0$ .

On pose  $\alpha_1 = \frac{b_1}{|b_1|}, \alpha_2 = \frac{b_2}{|b_2|}, \alpha_3 = \frac{b_3}{|b_3|}$ .

1. Montrer que le nombre  $S = \overline{\alpha_1}(z - b_1) + \overline{\alpha_2}(z - b_2) + \overline{\alpha_3}(z - b_3)$  est indépendant de  $z$ . Calculer  $|S|$  et en déduire que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |b_1| + |b_2| + |b_3| \leq |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|$$

2. Montrer que pour que l'affixe  $z$  d'un point  $M$  vérifie la relation

$$(1) \quad |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3| = |b_1| + |b_2| + |b_3|$$

il faut et il suffit que les trois angles de vecteurs

$$\left( \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{B_1M} \right), \left( \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{B_2M} \right), \left( \overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{B_3M} \right)$$

soient égaux.

Quel est l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie (1) ?

3. Soient  $MB_1, MB_2, MB_3$  les distances respectives de  $M$  aux points  $B_1, B_2$  et  $B_3$ . On pose  $S(M) = MB_1 + MB_2 + MB_3$ .  
Démontrer que l'ensemble des réels  $S(M)$  pour  $M$  appartenant à  $\mathcal{E}$  a un plus petit élément.

### Partie D

Soit  $ABC$  un triangle dont chaque angle géométrique a une mesure en radians inférieure à  $\frac{2\pi}{3}$ .

Déterminer par une construction géométrique simple le point  $M$  qui réalise le minimum de  $MA + MB + MC$ .