

∞ Baccalauréat C Rennes septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Étudier les variations de l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur \mathbb{R} . Écrire l'expression de f^{-1} (on pourra effectuer le changement de variable défini par $e^x = X$).
3. Déterminer la fonction dérivée de f^{-1} et calculer l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt.$$

EXERCICE 2

Soit A l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de $[0; 2[$ dans \mathbb{R} .
 f_1, f_2, f_3, f_4 les éléments de A définis par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - x \\ f_2(x) &= |1 - x| \\ f_3(x) &= E(x) \\ f_4(x) &= x \cdot E(x) \end{aligned}$$

$E(x)$ désignant la partie entière de x .

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est un système libre.
2. Montrer que f_4 appartient au sous-espace vectoriel engendré par f_1, f_2, f_3 et calculer les composantes de f_4 dans la base (f_1, f_2, f_3) .

PROBLÈME

Le plan affine euclidien \mathcal{E} étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

À tout point M de \mathcal{E} de coordonnées $(x; y)$ on associe le nombre complexe z affixe de M .

Partie A

1. Soient deux points M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2 ; montrer que M_1 et M_2 appartiennent à la même demi droite d'origine O si et seulement si

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

(on pourra par exemple écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique).

2. En déduire que trois points M_1 d'affixe z_1 , M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 sont sur la même demi droite d'origine O si et seulement si :

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

Partie B

Soient A_1, A_2 et A_3 trois points dont les affixes a_1, a_2, a_3 vérifient :

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$$

Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. (On pourra considérer l'isobarycentre des points A_1, A_2 et A_3).

Partie C

Soient B_1, B_2 et B_3 trois points dont les affixes b_1, b_2, b_3 vérifient $\frac{b_1}{|b_1|} + \frac{b_2}{|b_2|} + \frac{b_3}{|b_3|} = 0$.

On pose $\alpha_1 = \frac{b_1}{|b_1|}, \alpha_2 = \frac{b_2}{|b_2|}, \alpha_3 = \frac{b_3}{|b_3|}$.

1. Montrer que le nombre $S = \overline{\alpha_1}(z - b_1) + \overline{\alpha_2}(z - b_2) + \overline{\alpha_3}(z - b_3)$ est indépendant de z . Calculer $|S|$ et en déduire que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |b_1| + |b_2| + |b_3| \leq |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|$$

2. Montrer que pour que l'affixe z d'un point M vérifie la relation

$$(1) \quad |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3| = |b_1| + |b_2| + |b_3|$$

il faut et il suffit que les trois angles de vecteurs

$$\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{B_1M} \right), \left(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{B_2M} \right), \left(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{B_3M} \right)$$

soient égaux.

Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (1) ?

3. Soient MB_1, MB_2, MB_3 les distances respectives de M aux points B_1, B_2 et B_3 . On pose $S(M) = MB_1 + MB_2 + MB_3$.

Démontrer que l'ensemble des réels $S(M)$ pour M appartenant à \mathcal{E} a un plus petit élément.

Partie D

Soit ABC un triangle dont chaque angle géométrique a une mesure en radians inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer par une construction géométrique simple le point M qui réalise le minimum de $MA + MB + MC$.