

**Durée : 4 heures**

**⌘ Baccalauréat C Rouen juin 1976 ⌘**

**EXERCICE 1**

$k$  étant un entier relatif, on pose :

$$x = 2k - 1 \qquad y = 9k + 4$$

Montrer que tout diviseur commun à  $x$  et à  $y$  divise 17.

En déduire, suivant les valeurs de  $k$ , le plus grand diviseur commun de  $x$  et  $y$ .

**EXERCICE 2**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système

$$\begin{cases} 2iz_1 - z_2 &= 1 - 6i \\ z_1 + 2iz_2 &= i \end{cases}$$

2. Dans un plan affine euclidien orienté identifié au plan complexe, déterminer les rotations de mesure  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  transformant le point  $m_1$  d'affixe  $z_1$  en le point  $m_2$  d'affixe  $z_2$ .

**PROBLÈME**

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{A}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des applications  $f \in \mathcal{A}$  admettant, pour tout entier naturel non nul  $n$ , une dérivée d'ordre  $n$  notée  $f^{(n)}$  (ou  $f'$  pour  $n = 1$ ,  $f''$  pour  $n = 2, \dots$ ).

**Partie A**

1. a. Montrer que  $\mathcal{D}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .  
b. On considère l'ensemble  $E$  des applications de  $\mathcal{A}$  définies par :

$$f_{a,b}(x) = ae^{2x} + be^{-2x} \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

Établir que  $E$  est un espace vectoriel de base  $(f_{1,0}; f_{0,1})$  tel que :

$$\forall f_{a,b} \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'application  $\phi_n$  dans  $\mathcal{A}$  qui à  $f_{a,b} \in E$  associe  $f_{a,b}^{(n)}$  est un endomorphisme de  $E$ ; en donner la matrice dans la base  $(f_{1,0}; f_{0,1})$ .

En déduire que :

- a. Pour  $n$  pair,  $\phi_n$  est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.  
b. pour  $n$  impair,  $\phi_n$  est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle qu'on précisera.

3. a. Montrer que  $P$ , ensemble des fonctions paires de  $E$ , et  $J$ , ensemble des fonctions impaires de  $E$ , sont deux droites vectorielles de  $E$  de base respective  $f_{1,1}$  et  $f_{1,-1}$  telles que :

$$E = P \oplus J.$$

( $P$  et  $J$  supplémentaires dans  $E$ ).

- b. Étudier les variations des fonctions  $f_{1,1}$  et  $f_{1,-1}$ .  
Tracer leurs courbes représentatives dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé.  
Vérifier que  $f_{1,-1}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  ; définir sa bijection réciproque.

### Partie B

On pose, pour  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{D}$  :

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt.$$

1. a. Établir que :

$$\forall (f, g, h) \in \mathcal{D}^3, \quad (f+g) \star h = (f \star h) + (g \star h)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f; g) \in \mathcal{D}^2, \quad (\alpha f) \star g = \alpha(f \star g)$$

- b.  $A$  étant l'élément de  $\mathcal{D}$  défini par :

$$A(x) = 2x^2 - 1$$

calculer  $(f_{1,0} \star A)(x)$  et  $(f_{0,1} \star A)(x)$ .

(On pourra intégrer par parties).

2. Dédurre du B 1. que l'application

$$\phi : f \in \mathcal{D} \longmapsto f \star A \in \mathcal{A}$$

est linéaire et que l'image  $\phi(E)$  de  $E$  par  $\phi$  est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.