Baccalauréat C Rouen septembre 1976

EXERCICE 1

On dispose d'un sac contenant 4 boules noires et 4 boules blanches, toutes identiques au toucher.
On tire au hasard et sans remise, et l'on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule blanche.
Le nombre de boules noires que l'on a du tirer est une variable aléatoire X.
On demande d'établir la loi de probabilité de X.
Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules noires que l'on a du tirer soit inférieur ou égal à 2 ?
Calculer l'espérance et la variance de X,

EXERCICE 2

Dans le plan affine $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, on donne l'application affine f, qui au point $M(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' &=& x+4\\ y' &=& -x-y-2\end{array}\right.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif et déterminer cet endomorphisme.
2. f est-elle bijective ? f est-elle involutive ? f admet-elle des points invariants ?
3. Montrer qu'il existe une droite du plan affine globalement invariante par f.

PROBLÈME

Partie A

Une suite numérique (U_n) est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = \frac{6+U_n}{2+U_n}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 $(a < b)$ pour lesquelles la suite est constante.
2. Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même de U_n. Dans ces conditions, calculer :

$$\frac{U_{n+1}-a}{U_{n+1}-b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n-a}{U_n-b}$$

3. En déduire que la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n-a}{U_n-b}$ est une suite géométrique.
   Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini ; en déduire celle de U_n.

Partie B

On désigne par f, la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+6}{x+2}$$

1. Variations de f ; courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé (unité le cm),
2. Retrouver à l'aide de la fonction f les réels a et b de la question 1. de A.
3. Déterminer l'équation de $(\mathscr{C})$ rapportée à ses asymptotes ; préciser la nature de $(\mathscr{C})$, ses sommets, ses foyers, ses directrices ainsi que l'excentricité.
4. Déterminer les points de $(\mathscr{C})$ dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
5. Trouver l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine plan défini par :

$$\lambda \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x) \ \lambda \text{ satisfaisant à } -2 < \lambda < 0.$$

   $\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand λ tend vers -2 ?

Partie C

À tout nombre complexe z, on associe quand cela est possible le nombre complexe z' tel que

$$z' = \frac{z+6}{z+2}.$$

On désigne dans le plan complexe, par M et M' les images de z et de z'. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ (x, y, x', y' réels).

1. Calculer x' et y' en fonction de x et y. Préciser l'ensemble des points M qui n'ont pas d'image.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels z' est un réel négatif.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels l'argument de z' est $\frac{\pi}{2}$ (mod $2k\pi$).
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}_k$ des points M du plan pour lesquels M' décrit la droite D_k d'équation $y = k$.
   Reconnaître $\mathscr{C}_k$. Montrer que lorsque k décrit $\mathbb{R}^\star$, $\mathscr{C}_k$ passe par un point fixe et reste tangente à une droite fixe.