

**Durée : 4 heures**

**⌘ Baccalauréat C Strasbourg juin 1976 ⌘**

**EXERCICE 1**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 3 - |e^{4x} - 2e^{2x}|$$

(on désigne par  $e$  la base de la fonction logarithme népérien notée  $\text{Log}$ ).

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .
2. Donner la définition de la dérivabilité en  $x_0$  d'une fonction numérique d'une variable réelle.  
Application : la fonction  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = \frac{1}{2} \text{Log} 2$  ?
3. Étudier la fonction  $f$  et tracer sa courbe représentative.

**EXERCICE 2**

Résoudre dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :

$$z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3}) \cdot |z|$$

Représenter les images des solutions de cette équation dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct.

**PROBLÈME**

Soit  $P$  un plan vectoriel,  $I$  l'application identique de  $P$  et  $\omega$  l'application nulle de  $P$ .

$$I: \begin{array}{ccc} P & \rightarrow & P \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}, \quad \omega: \begin{array}{ccc} P & \rightarrow & P \\ \vec{u} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

Préliminaires : Pour cette seule question  $P$  est euclidien orienté et muni d'une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $g$  la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est  $\theta$ .

- a. Écrire la matrice de  $g$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- b. Démontrer que  $g \circ g - (2 \cos \theta)g + I = \omega$ .

On se propose d'étudier tous les endomorphismes  $f$  de  $P$  vérifiant :

$$f \circ f - (2 \cos \theta)f + I = \omega \quad (1)$$

où  $\theta$  est un réel donné de l'intervalle  $[0; 2\pi[$ .

Soit  $f$  une solution de (1) .

1. Chercher le noyau de  $f$  et montrer que  $f$  est une application bijective de  $P$  dans  $P$ .
2. Démontrer que si  $f$  est involutive, alors  $f = (\cos \theta)I$ . En déduire les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles (1) admet des solutions involutives et donner ces solutions.
3. On suppose  $\theta$  différent de 0 et de  $\pi$  ? Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de  $P$  et  $\vec{v}$  défini par :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sin \theta} \left[ -(\cos \theta) \vec{u} + f(\vec{u}) \right] \quad (2)$$

- a. Montrer que pour tout réel  $k$ , le noyau de  $f - kI$  est égal à  $\{\vec{0}\}$ .

En déduire qu'il n'existe pas de réel  $\lambda$  tel que  $\vec{v} = \lambda \vec{u}$  et que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une base de  $P$ .

- b. En utilisant (2) déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ . Est-il possible de conclure que  $f$  est une rotation vectorielle ?

- c. Soit  $\varphi$  l'application de  $P^2$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à tout couple  $(\vec{w}, \vec{w}')$  de  $P^2$  tel que

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}, \quad \vec{w}' = x'\vec{u} + y'\vec{v}$$

associe le réel  $xx' + yy'$ .

Démontrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $P$ .

Vérifier que pour ce produit scalaire, la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  est orthonormée.

$P$  étant muni de ce produit scalaire et de la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  supposée directe, quelle est la nature de  $f$  ?

4. On suppose  $\theta = 0$ .

- a. Vérifier que (1) est alors équivalente à

$$(f - I) \circ (f - I) = \omega \quad (3)$$

$f$  étant une solution de (3), démontrer que le noyau de  $f - I$  n'est pas  $\{\vec{0}\}$ .

- b.  $\vec{u}$  étant un vecteur non nul du noyau de  $f - I$ , soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $P$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v})$  soit une base de  $P$ . La matrice de  $f$  dans cette base est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels.

Montrer que  $\mu = 1$ .

- c. Si  $f$  est solution de (3) différente de  $I$  vérifier que  $f - I = s \circ h \circ p$  où  $p$  est la projection sur la droite vectorielle engendrée par  $\vec{v}$  de direction la droite vectorielle engendrée par  $\vec{u}$ ,  $h$  l'homothétie vectorielle de rapport  $\lambda$  et  $s$  une symétrie vectorielle dont on déterminera les éléments.
- d. On définit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f^n$  par

$$f^0 = I, \quad f^n = f^{n-1} \circ f.$$

Déterminer la matrice de  $f^n$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

**N.B.** - Les questions 1., 2., 3., 4. sont indépendantes entre elles et indépendantes des préliminaires.