

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Tel Aviv juin 1976 ∞

EXERCICE 1

F désigne l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Déterminer $(\alpha ; \beta) \in F^2$ de façon qu'il existe $(a, b, c) \in F^3$ tel que

$$\forall x \in F, \quad 1x^4 + 3x^3 + 5x^2 + \alpha x + \beta = (ax^2 + bx + c)^2.$$

EXERCICE 2

Dans un plan affine euclidien, on donne une droite D et deux points distincts F et A , symétriques par rapport à D . On désigne par H l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et D pour directrice associée à F .

1. Montrer que A est un sommet de H . Déterminer l'autre sommet A' et le centre Ω , en calculant $\frac{\overline{AA'}}{\overline{AF}}$ et $\frac{\overline{A\Omega}}{\overline{AF}}$. Construire H .

2. Soit C un cercle centré en un point O de D , et passant par F .

On se propose de montrer que $C \cap H = \{A, M_1, M_2, M_3\}$ où M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , choisi de façon que $(O; \vec{i})$ soit un repère de D . À chaque point du plan correspond ainsi son affixe $z = x + iy$; on désigne par a l'affixe de F .

Montrer que C et H sont les ensembles des points du plan dont les affixes vérifient respectivement

$$(C) \quad z\bar{z} = a\bar{a}, \quad (H) \quad (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) + (z - \bar{z})^2 = 0.$$

En déduire que $C \cap H$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes vérifient une équation de la forme :

$$(z - \bar{a})(z^3 - k) = 0$$

où k est un nombre complexe dont on exprimera le module et l'argument en fonction du module r et de l'argument φ de a . Conclure.

PROBLÈME

On note \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls et P l'ensemble des nombres premiers. À tout $n \in \mathbb{N}^*$ on associe l'ensemble D_n des $d \in \mathbb{N}^*$ qui divisent n , l'ensemble C_n des $(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $d_1 d_2 = n$, et l'ensemble Γ_n des $(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $d_1 d_2 d_3 = n$.

Le p.g.c.d. des entiers m et n est noté $m \wedge n$.

Partie A

Dans tout le problème, on appelle suite une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R} et on note \mathcal{U} l'ensemble des suites. On admet que l'on dispose du groupe $(\mathcal{U}, +)$, la loi $(+)$ étant définie par :

$$\forall (u; v) \in \mathcal{U}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (u + v)(n) = u(n) + v(n).$$

On définit une seconde loi interne (T) sur \mathcal{U} par :

$$\forall (u; v) \in \mathcal{U}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (u \text{ T } v)(n) = \sum_{d \in D_n} u(d) \cdot v\left(\frac{n}{d}\right).$$

C'est ainsi que : $(u \text{ T } v)(4) = u(1)v(4) + u(2)v(2) + u(4)v(1)$.

1. Vérifier que, pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{U}^3$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(u \text{ T } v)(n) = \sum_{(d_1, d_2) \in C_n} u(d_1) \cdot v(d_2).$$

$$((u \text{ T } v) \text{ T } w)(n) = \sum_{(d_1, d_2, d_3) \in \Gamma_n} u(d_1) \cdot v(d_2) \cdot w(d_3).$$

Quelles propriétés de la loi (T) découlent de ce résultat (que l'on pourra admettre, à défaut de démonstration) ?

2. La loi (T) admet-elle un élément neutre ? Le triplet $(\mathcal{U}, +, \text{T})$ est-il un anneau ?

Partie B

Une suite $u \in \mathcal{U}$ est dite *régulière* si et seulement si elle vérifie :

$$u(1) = 1, \quad u(qq') = u(q)u(q') \text{ pour tout } (q, q') \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tel que } q \wedge q' = 1.$$

1. Montrer que sont régulières les suites θ , ψ et f_m définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \theta(n) = 1, \quad \psi(n) = n, \quad f_m(n) = m \wedge n$$

(où $m \in \mathbb{N}^*$ est donné).

2. Soit u une suite régulière. Vérifier que $u(q_1 \cdots q_n) = \prod_{i=1}^n u(q_i)$ pour tout

$(q_1, \dots, q_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tel que q_1, \dots, q_k soient premiers entre eux deux à deux.

Exprimer $u(n)$ pour $n = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$, avec $(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{P})^k$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in (\mathbb{N}^*)^k$.

Partie C

1. Montrer que si les suites u et v sont régulières, alors la suite $u \text{ T } v$ est régulière.
2. À $n \in \mathbb{N}^*$, on associe le nombre $\nu(n)$ des diviseurs de n dans \mathbb{N}^* et la somme $\sigma(n)$ de ces diviseurs. Montrer qu'il existe deux suites régulières u_1 , et u_2 telles que $\nu = e \text{ T } u_1$, et $\sigma = e \text{ T } u_2$. En déduire que les suites ν et σ sont régulières. Les notations étant celles de B 2., donner des expressions de $\nu(n)$ et $\sigma(n)$. En particulier, calculer $\nu(700)$ et $\sigma(700)$.
3. Montrer qu'est régulière la suite λ définie par : $\lambda(1) = 1$; $\lambda(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier ; $\lambda(n) = (-1)^k$ si n est le produit de k nombres premiers deux à deux distincts. Déterminer l'image de $n \in \mathbb{N}^*$ par chacune des suites ν , σ , λ .