

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Toulouse juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x(1 + \text{Log } x)}$$

La notation  $\text{Log}$  désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de  $f$  et construire son graphique dans un plan  $P$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $I = ]\frac{1}{e}; +\infty[$ .
  - a. Démontrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur  $g(I) = ]0; +\infty[$ .
  - b. On désigne par  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ ; calculer  $g(e)$  et la dérivée de  $g^{-1}$  au point  $\frac{1}{2e}$ .

EXERCICE 2

Soit  $\mathcal{V}$  un espace vectoriel de dimension trois et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathcal{V}$ . On considère l'application linéaire  $\varphi$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}$  qui à tout vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x; y; z)$  associe le vecteur  $\vec{u}'$  de coordonnées  $(x'; y'; z')$  telles que

$$\begin{cases} x' &= 3x + y - z \\ y' &= 2x + 2y - z \\ z' &= 4x + 2y - z \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}$  des vecteurs invariants par  $\varphi$  et indiquer une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  de  $\mathcal{P}$ .
2. Soit  $\mathcal{D}$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .
  - a. Démontrer que la restriction de  $\varphi$  à  $\mathcal{D}$  est une homothétie vectorielle de  $\mathcal{D}$ .
  - b. Démontrer que tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathcal{V}$  peut être décomposé d'une manière unique en  $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ ,  $\vec{u}' \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{u}'' \in \mathcal{D}$ .
  - c. Établir que :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \quad \varphi(\vec{u}) = \vec{u}' + 2\vec{u}'' = \vec{u} + \vec{u}''.$$

3. Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à  $\mathcal{V}$  et  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  un repère cartésien de  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  étant les vecteurs définis précédemment.

On considère l'application affine  $f$  qui laisse le point  $O$  invariant et dont l'endomorphisme associé est  $\varphi$ . Si  $M'$  est l'image par  $f$  du point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , en utilisant ce qui précède, exprimer dans le repère choisi les coordonnées de  $M'$  en fonction de celles de  $M$ .

Indiquer une construction géométrique de  $M'$ .

**PROBLÈME**

Une suite réelle  $f$  application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  donne de  $n$  l'image  $f(n)$  notée  $f_n$ .

Soit  $a$  et  $\alpha$  deux réels fixés vérifiant :  $a \neq 0$  et  $0 \leq \alpha < \pi$ .

On considère l'ensemble  $F$  des suites  $f$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = (2a \cos \alpha) f_{n+1} - a^2 f_n.$$

1. On suppose dans cette question que  $\alpha \neq 0$   
Démontrer que les suites  $u$  et  $v$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \cos n\alpha \quad \text{et} \quad v_n = a^n \sin n\alpha.$$

sont deux éléments de  $F$ . Démontrer que les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(u_0, u_1)$  ;  $(v_0, v_1)$  sont indépendants.

2. On suppose dans cette question que  $\alpha = 0$   
Démontrer que les suites  $r$  et  $s$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = a^n \quad \text{et} \quad s_n = na^n$$

sont deux éléments de  $F$ . Démontrer que les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(r_0, r_1)$  ;  $(s_0, s_1)$  sont indépendants.

3. a. Etablir que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , espace vectoriel des suites réelles.  
b. Démontrer que  $f$  est déterminée par la donnée du couple  $(f_0, f_1)$  et en déduire que l'application  $\varphi$  de  $F$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(f) = (f_0, f_1)$  est bijective.  
c. Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire. Quelle est la dimension de  $F$ ? On rappelle que, compte-tenu de la notation  $f_n$

$$(f + g)(n) = f_n + g_n \quad \text{et} \quad (kf)(n) = kf_n, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. Soit  $\varphi^{-1}$  l'application réciproque de  $\varphi$  définie dans  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $F$ . Montrer que si  $W_1$  et  $W_2$  sont deux vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\varphi^{-1}(W_1)$  et  $\varphi^{-1}(W_2)$  sont deux vecteurs de  $F$  indépendants.  
En déduire que si  $\alpha \neq 0$ ,  $(u, v)$  est une base de  $F$  et que si  $\alpha = 0$ ,  $(r, s)$  est une base de  $F$ . Indiquer dans les deux cas une forme générale des éléments de  $F$ .  
5. Soit  $b$  un réel fixé non nul. On considère l'ensemble  $C$  des suites réelles  $c$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} - (2a \cos \alpha) c_{n+1} + a^2 c_n = b^n.$$

- a. Si  $\alpha = 0$  et  $b = a$ , démontrer qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que la suite  $t$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \lambda n^2 a^n$$

appartient à  $C$ .

- b. Si  $\alpha \neq 0$  et  $b \neq a$ , démontrer qu'il existe un réel  $\mu$  tel que la suite  $t'$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t'_n = \mu b^n$$

appartient à  $C$ .

- c. L'ensemble  $C$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  ?

6. Si  $\alpha = 0$  et  $b = a$ ,  $c$  appartenant à  $C$ , démontrer que la suite de terme général  $(c_n - t_n)$  est un élément de  $F$ ; inversement si  $f$  appartient à  $F$ , montrer que la suite de terme général  $(f_n + t_n)$  appartient à  $C$ . En déduire une forme générale des éléments de  $C$ .
7. Déterminer de même une forme générale des éléments de  $C$  lorsque :  $\alpha \neq 0$  ou  $b \neq a$ .