Baccalauréat C Amiens juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 6.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n^2 - n$ soit divisible par 6.
3. Déterminer les entiers relatifs x et y tels que $3x + y - 1$ et $x - y - 3$ soient tous deux divisibles par 6.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, $B = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ une base orthonormée de E. On considère les applications linéaires f_i $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ de E dans E définies par :

$$\begin{array}{lclclclclcl}
f_1\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} & ; & f_1\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & \overrightarrow{e_3} & ; & f_1\left(\overrightarrow{e_3}\right) & = & \overrightarrow{0}\\
f_2\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & \overrightarrow{e_1} & ; & f_2\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & -\overrightarrow{e_2} & ; & f_2\left(\overrightarrow{e_3}\right) & = & \overrightarrow{e_3}\\
f_3\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & -\overrightarrow{e_1} & ; & f_3\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & -\overrightarrow{e_2} & ; & f_3\left(\overrightarrow{e_3}\right) & = & -\overrightarrow{e_3}\\
f_4\left(\overrightarrow{e_1}\right) & = & \overrightarrow{e_2} & ; & f_4\left(\overrightarrow{e_2}\right) & = & \overrightarrow{e_3} & ; & f_4\left(\overrightarrow{e_3}\right) & = & \overrightarrow{e_1}
\end{array}$$

1. Indiquer, pour chaque application f_i en justifiant votre affirmation, s'il s'agit ou non d'un endomorphisme orthogonal.
2. Pour chaque endomorphisme orthogonal f_i : préciser l'ensemble F_i des vecteurs de E invariants par f_i, la nature de f_i ainsi que le nombre minimum de symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel en lesquelles on peut décomposer f_i.

   Indiquer si une telle application f_i est un endomorphisme orthogonal positif ou négatif.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

P est un plan affine euclidien muni d'un repère orthononné $R = \left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
(Pour les figures, on représentera l'unité par 4 centimètres).

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x\text{Log}\,|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star\\ f(0) & = & 0\end{array}\right.$$

   Etudier f (en particulier la continuité et la dérivabilité).

   Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère R; montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente en 0 que l'on précisera. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère R.

2. **a.** On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\text{d}t \qquad (1)$

   Justifier le fait que $F(x)$ a un sens pour tout x réel.

   L'égalité (1) définit donc une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x t\text{Log}\,t\,\text{d}t$ pour x strictement positif.

3. a. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1\varphi(x) & = & \dfrac{x^2}{2}\text{Log}\,|x| - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star \\ \varphi(0) & = & \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est la fonction φ' dérivée de φ ? Justifier le fait que $\varphi = F$.

b. Construire la courbe Γ représentant φ dans le repère R.

Partie B

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes. On définit dans $\mathbb{C}$ une loi interne, notée $\star$, de la manière suivante : si $z = x + \text{i}y$, $z' = x' + \text{i}y'$, $\left(x,\ y,\ x',\ y'\right) \in \mathbb{R}^4$, on pose :

$$z \star z' = xx' + \text{i}(xy' + x'y).$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif unitaire (+ désigne l'addition des nombres complexes).
2. a. Déterminer l'ensemble $\mathbb{C}'$ des éléments de $\mathbb{C}$ inversibles pour la loi $\star$. Si $z = x+\text{i}y\,(x,\ y$ réels) est un élément de $\mathbb{C}'$, montrer que son inverse $\tilde{z}$ pour la loi $\star$ est $\tilde{z} = \dfrac{\overline{z}}{x^2}$, $\overline{z}$ désignant le complexe conjugué de z.
En déduire les éléments z de $\mathbb{C}'$ tels que l'on ait : $z = \tilde{z}$.
Montrer que $\mathbb{C}'$ est un groupe abélien pour la loi induite dans $\mathbb{C}'$ par la loi $\star$.

   b. Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par :

$$G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists t \in \mathbb{R},\ z = \text{e}^t + \text{i}t\text{e}^t\}$$

(où e est la base du logarithme népérien).
Montrer que G est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}',\ \star)$.

3. Le complexe $z = x + \text{i}y$ a pour image $m(x\ ;\ y)$ dans le plan P.
   a. Montrer que, dans P, l'ensemble des points images des éléments de G est une partie γ de $\mathbb{C}$ que l'on précisera.
   b. Soit z un élément quelconque de G, d'image m dans P.
Soit $\tilde{m}$ l'image de $\tilde{z}$ inverse de z pour la loi $\star$. Que peut-on dire des arguments de z et $\tilde{z}$? En déduire une construction de $\tilde{m}$ connaissant le point m de γ. (Faire une figure en supposant m distinct de A).
   c. Soit z et z' deux éléments de G. On pose $Z = z \star z'$, On appelle m, m', M, A les points de P d'affixes respectives z, z', Z, 1.
Soit Z' l'affixe du point M' transformé de m' dans la similitude plane directe de centre O transformant A en m. Exprimer Z' en fonction de z et z'. Montrer que M et M' ont la même ordonnée.
En déduire une construction de l'image M de Z connaissant les images m et m' des éléments z et z' de G. (Faire une figure : on représentera les points A, m, m' sur γ ; on marquera les points M et M' ; la figure sera faite en supposant A, m, m', m distincts),
4. Soit z_0 un élément donné de l'ensemble $\mathbb{C}'$; on considère l'application f_{z_0} de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{z_0}(z) = z_0 \star z.$$

a. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,

b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par f_{z_0}. Discuter,

c. Déterminer et caractériser les automorphismes f involutifs.

d. Soit F l'ensemble des automorphismes f_{z_0} : $F = \left\{f_{z_0} \mid z_0 \in \mathbb{C}'\right\}$.
Montrer que $(F,\ \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}',\ \star)$, En déduire la structure de $(F,\ \circ)$, $\circ$ étant la loi de composition des applications.