

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

n étant un entier relatif quelconque, on pose :

$$A = n - 1 \quad \text{et} \quad B = n^2 - 3n + 6$$

1.
 - a. Montrer que le p.g.c.d. de A et B est égal au p.g.c.d. de A et 4.
 - b. Déterminer, suivant les valeurs de n , le p.g.c.d. de A et B .
2. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif?

EXERCICE 2

3 POINTS

Dans E , plan affine euclidien, A , B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral, tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = d$, où d est un réel positif non nul.

1. Déterminer l'ensemble des réels a tels que les points A , B , C affectés respectivement des coefficients a , 1, 1, admettent un barycentre G_a .
Quel est l'ensemble des points G_a ainsi obtenus?
2. On prend $a = 1$.
Déterminer le point G_1 correspondant.
On pose $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $f_1(M) = 2d^2$.
3. On prend $a = -2$.
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V}(M) = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant de M qu'on précisera.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $f_2(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit égal à 0.

PROBLÈME

13 POINTS

Partie A

Soit \mathcal{P} un plan vectoriel muni d'une base (\vec{i}, \vec{j}) . Pour tout couple $(a; b)$ de réels, on définit une application linéaire de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , notée $\varphi_{a, b}$ dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} a-b & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

On désigne par \mathcal{A} l'ensemble des applications linéaires $\varphi_{a, b}$ lorsque a et b décrivent \mathbb{R} .

1.
 - a. Quelle est la nature de $\varphi_{1, 0}$?
 - b. Montrer que $\varphi_{1, 0}$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

- c. Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P} et vérifier que $(\varphi_{1,0}; \varphi_{0,1})$ est une base de \mathcal{A} . Quelles sont les coordonnées de $\varphi_{a,b}$ dans cette base ?

Pour faire, de l'ensemble \mathcal{E} des applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on définit les opérations $+$ et \cdot comme suit :

- si f et g sont dans \mathcal{E} , $f + g$ est défini par :

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}).$$

- si f est dans \mathcal{E} , et λ dans \mathbb{R} , $\lambda \cdot f$ est défini par :

$$(\lambda \cdot f)(\vec{x}) = f(\lambda \vec{x}).$$

2. On munit \mathcal{A} de la loi d'addition des applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P} notée $+$ et de la loi de composition des applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P} notée \circ . Montrer que $(\mathcal{A}, +, \circ)$ est un anneau commutatif, unitaire. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.

Partie B

Soit (P) un plan affine d'espace vectoriel associé à \mathcal{P} . On munit (P) du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour tout réel b non nul, on note f_b l'application affine de (P) dans (P) qui au point m de coordonnées $(x; y)$ associe le point M de coordonnées $(X; Y)$ défini par

$$\begin{cases} X &= -bx + by + 1 \\ Y &= by \end{cases}$$

1. Vérifier que l'application linéaire associée à f_b appartient à l'ensemble \mathcal{A} défini à la partie A.
2. Déterminer, suivant les valeurs de b , l'ensemble des points invariants par f_b .
3.
 - a. On suppose : $b = 1$. Montrer que f_1 est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2x - 1$ parallèlement à l'axe $x'Ox$.
 - b. On suppose : $b = -1$. Montrer que f_1 est la composée commutative d'une symétrie par rapport à une droite contenant O et d'une translation.
 - c. On suppose : $b \neq 1$ et $b \neq -1$. Montrer que f_b est la composée commutative d'une homothétie et d'une symétrie par rapport à une droite.

Partie C

On suppose maintenant que (P) est un plan affine euclidien et que le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est orthonormé. On considère le mouvement d'un point m de (P) dont les coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} x &= -2t + 2e^t + 1 \\ y &= -2t + 4e^t + 1 \end{cases}, \quad t \text{ réel quelconque. } (t \text{ est la date})$$

On note (γ) la trajectoire du point m lorsque t décrit \mathbb{R} .

1. Montrer que (γ) admet en chacun de ses points une tangente et montrer qu'il existe un unique point A de (γ) , que l'on déterminera, tel que la tangente en A à (γ) soit parallèle à l'axe $y'Oy$.
2. Soit M le transformé du point m par la symétrie f_1 définie à la partie B. Quelles sont, en fonction de t , les coordonnées $(X; Y)$ du point M ? Calculer Y en fonction de X .

3. Soit la fonction numérique F définie par

$$F(X) = 2\text{Log} \left(\frac{2}{X-1} \right) + 2X - 1$$

(X étant une variable réelle qui parcourt l'ensemble de définition de F que l'on précisera).

Étudier cette fonction F et tracer sa représentation graphique (Γ) relativement au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Pour étudier le comportement de $F(X)$ pour $X \rightarrow +\infty$, on recherchera les limites, pour $X \rightarrow +\infty$, de $\frac{F(X)}{X}$ et de $F(X) - 2X$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Γ) et de la droite d'équation $Y = 2X - 1$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4. Dédurre des questions précédentes le tracé de la trajectoire (γ) du point m .