Baccalauréat C Centres étrangers septembre 1977

Exercice 1

1. Montrer que, selon que l'entier naturel n est pair ou impair, l'entier n^4 est congru modulo 16 à 0 ou à 1.
2. Soit A l'anneau $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +, \times)$, dont on désigne les éléments par $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots$

   Expliciter l'ensemble S des solutions de l'équation : $x^4 = \dot{1}$, dans laquelle l'inconnue est l'élément x de A.

   Étant donné le naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant 15$, on considère l'équation

   $$\sum_{i=1}^{i=k} (x_i)^4 = k$$

   dans laquelle l'inconnue est l'élément $(x_1, \ldots, x_k)$ de A^k.

   Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est S^k (A^k et S^k désignent respectivement les produits de k ensembles égaux à A et de k ensembles égaux à S).

Exercice 2

Dans un espace vectoriel euclidien E, de dimension 3, on donne deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ dont le produit scalaire $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ n'est pas nul.

À tout réel k on associe l'endomorphisme u_k de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans lui-même) qui est déterminé par

$$u_k\left(\overrightarrow{X}\right) = \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{A} + k\overrightarrow{X}$$

(en désignant par $\left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{A}$ le vecteur obtenu en multipliant le vecteur $\overrightarrow{A}$ par le réel $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{X}$).

1. Montrer que le plan vectoriel (P) ensemble des vecteurs de E orthogonaux à $\overrightarrow{B}$ et la droite vectorielle (D) ensemble des vecteurs de E colinéaires à $\overrightarrow{A}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

   Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{Y}$ de (P) et un vecteur $\overrightarrow{Z}$ de (D) sont respectivement transformés par u_k en des vecteurs de la forme $\lambda_k\overrightarrow{Y}$ et $\mu_k\overrightarrow{Z}$, λ_k et μ_k désignant des réels que l'on exprimera en fonction de k (et, éventuellement, de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$).
2. Déterminer le noyau N_k et l'image I_k de l'endomorphisme u_k : on étudiera chacun des cas qui se présenteront ; on montrera que, en général, u_k est inversible.

Problème

1. Soit H l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par

$$\begin{aligned}
H(x) &= -x + \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad x \leqslant 0,\\
H(x) &= x - \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad x \geqslant 1,\\
H(x) &= \frac{x^4}{2} - x + \frac{3}{4} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

a. Montrer que H est continue et admet une dérivée $H'(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}$; montrer que H' est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En quels points de $\mathbb{R}$ l'application H admet-elle une dérivée seconde ?

b. Étudier les variations des applications H et H' ; les représenter graphiquement dans un même plan rapporté à un repère orthonormé (unité de longueur : 4 cm).

2. Soit g une application continue du segment $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$. On lui associe l'application G, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, déterminée par

$$G(x) = \int_0^1 |x-t| g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. On suppose d'abord $x \in [0 : 1]$. Montrer qu'en considérant le segment $[0 : 1]$ comme la réunion des segments $[0 ; x]$ et $[x ; 1]$ on peut exprimer $G(x)$ à l'aide des intégrales

$$A(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad B(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

et des nombres $a = A(1)$ et $b = B(1)$.

b. Montrer que, sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[1 ; +\infty[$, G coïncide avec une fonction affine.

c. Dans le cas particulier $g(t) = t^2$, comparer G à l'application H étudiée au **1**.

3. a. En revenant au cas général, montrer que G est continue et admet une dérivée en tout point de $\mathbb{R}$; montrer que G' est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En quels points de $\mathbb{R}$ l'application G admet-elle une dérivée seconde ?

b. On admet que l'on a défini l'addition de deux fonctions réelles d'une variable réelle, le produit de l'une de ces fonctions par un réel et que l'on a montré que ces opérations permettent de munir d'une structure d'espace vectoriel chacun des ensembles $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ respectivement constitués par les applications continues de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ et par les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une dérivée continue.

Montrer qu'en posant $\varphi(g) = G$, on détermine une application linéaire φ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

4. On reprend les notations du 2. a. et on se limite à $x \in [0 ; 1]$.

Exprimer $G(x)$ sans signe d'intégration dans le cas où g est la dérivée seconde d'une application donnée, f, de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$; pour cela on montrera que, dans ce cas

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & f'(x) - f'(0) \\ B(x) & = & x f'(x) - f(x) + f(0). \end{array}$$

Déduire de cette étude que, pour toute application f de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde continue, on peut écrire, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$f(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t| f''(t)\,\mathrm{d}t,$$

α et β désignant des constantes, que l'on exprimera en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.