

Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

Les fonctions réelles f et g sont définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Étudier les ensembles de définition des fonctions dérivées premières de f et de g , puis calculer la dérivée première, pour la valeur x de la variable, de chacune des fonctions f et g .

Calculer, à l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$$

Étudier la limite, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, de

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^3}} + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]^3}} + \dots + \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]^3}} \right]$$

EXERCICE 2

4 POINTS

Un plan affine euclidien P étant rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on associe au point M de P dont les coordonnées sont x_M et y_M le nombre complexe

$$z_M = x_M + iy_M \quad (i^2 = -1), \text{ affixe de } M.$$

Les réels α, β, γ étant strictement positifs, les points A, B, C ont respectivement pour affixes

$$z = \alpha, \quad z_B = \beta, \quad z_C = i\gamma.$$

On construit dans P les triangles équilatéraux CBA' , ACB' et BAC' de manière que ces triangles soient extérieurs au triangle ABC .

1. Calculer les affixes des points A' , B' et C' en fonction de α, β, γ et de

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Démontrer que les nombres complexes $z_{A'} - z_A$, $z_{B'} - z_B$, et $z_{C'} - z_C$ ont le même module.

2. On suppose que $\alpha = -1, \beta = +1, \gamma = \sqrt{3}$.

Déterminer les nombres complexes a, b et c de manière que l'équation

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0 \text{ ait pour solutions } z_{A'}, z_{B'}, z_{C'}.$$

PROBLÈME

12 POINTS

On désigne par P un plan d'un espace affine euclidien E dont la dimension est 3.

La distance de deux points M et N de E , ou norme du vecteur \overrightarrow{MN} , est notée $\|\overrightarrow{MN}\|$.

À tout couple $(M; N)$ de points de E , on associe :

- α . le réel $\Delta(M; N) = \|\overrightarrow{MN}\|$ si les points M et N ont la même projection orthogonale m sur P
 β . le réel $\Delta(M; N) = \|\overrightarrow{Mm}\| + \|\overrightarrow{mn}\| + \|\overrightarrow{nN}\|$ si les points M et N ont, sur P , des projections orthogonales m et n distinctes.

On choisira un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E tel que (O, \vec{i}, \vec{j}) soit un repère cartésien orthonormé de P .

1. On désigne par t un réel quelconque.
 Le point $M(t)$ de E est défini par l'égalité

$$\overrightarrow{OM(t)} = (\cos t) \cdot \vec{i} + (\sin t) \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}.$$

et le point L de P est tel que

$$\overrightarrow{OL} = \vec{i}.$$

$$\text{Démontrer que } \Delta(L, M(t)) = |t| + \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|.$$

2. Étudier les variations de la fonction f :

$$\begin{array}{ccc} f: [-2\pi; +4\pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| + \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| \end{array}$$

Tracer la courbe représentative F de f dans un plan Γ affine euclidien, rapporté au repère cartésien orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra le centimètre comme unité de longueur.

3. L'unité d'aire étant le centimètre carré, calculer l'aire de la partie du plan Γ limitée par F , par l'axe des abscisses et par les droites qui ont pour équations respectives $t = 4\pi$ et $t = -2\pi$.
 4. α étant un réel strictement positif donné, on désigne par A le point de E tel que

$$\overrightarrow{OA} = \alpha \vec{k}.$$

Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que, ℓ étant un réel donné,

$$\Delta(A; M) = \ell?$$

Discuter suivant les valeurs de ℓ .

Quel est l'ensemble des points N du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) tels que

$$\Delta(A; N) = \ell?$$

Discuter suivant les valeurs de ℓ .

5. Étant donnés les réels α, β, γ strictement positifs et tels que $\beta < \alpha$, les points A et B de E sont définies par : $\overrightarrow{OA} = \alpha \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = \gamma \vec{j} + \beta \vec{k}$.
 Quel est l'ensemble des points S de P tels que

$$\Delta(A; S) = \Delta(S; B)?$$

Discuter suivant les valeurs respectives de γ et de $\alpha - \beta$.

6. On désigne par φ une application affine de E sur E qui
 a. laisse P globalement invariant et qui

b. est telle que, quels que soient les points M et N de E ,

$$\Delta(M; N) = \Delta(\varphi(M); \varphi(N)).$$

Quelles sont les restrictions à P des applications affines φ ?

Prouver que, si m est la projection orthogonale de M sur P , $\varphi(m)$ est la projection orthogonale de $\varphi(M)$ sur P .

Trouver toutes les applications affines φ de E sur E qui possèdent les propriétés **a.** et **b.**