

Baccalauréat C Côte d'Ivoire juin 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

On sait que : $\begin{cases} 10^3 - 1 = 9 \times 111 \\ 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13 \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $A = 10^{9n} + 2 \cdot 10^{6n} + 2 \cdot 10^{3n} + 1$.

1. Quel est le reste de la division de A par 111 ?
2. On suppose n impair. Montrer que A est divisible par 7, par 11 et par 13.
3. On suppose n pair.
 - a. Montrer que $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.
 - b. Quel est le reste de la division de A par 111×1001 ?

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans l'espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3, rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définit une application linéaire pour les égalités suivantes où $(a; b) \in X\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \vec{i} \\ f(\vec{j}) = a\vec{j} + b\vec{k} \\ f(\vec{k}) = a\vec{j} - b\vec{k} \end{cases}$$

1. Calculer a et b pour que f soit une symétrie vectorielle ; préciser l'ensemble image et la direction.
2. Calculer a et b pour que f soit un projecteur (c'est-à-dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$). Indiquer dans chaque cas l'ensemble des vecteurs invariants et la direction.
3. En supposant que l'espace vectoriel est euclidien et la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée, calculer a et b pour que f soit une rotation. On donnera l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

PROBLÈME

11 POINTS

Question préliminaire :

Soit u la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$u(x) = \text{Log}(1 + x)$$

$\text{Log}(1 + x)$ En étudiant la dérivabilité de u au point 0 (zéro), montrer que $\frac{\text{Log}(1 + x)}{x}$ possède une limite quand x tend vers 0.

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \text{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

Partie A

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie par

$$f_n(x) = x^n(1 - x).$$

1. Étudier la variation de f .

Montrer que l'équation dans \mathbb{R} : $f_n(x) = 1$ a une seule solution ou aucune suivant la parité de n .

2. Montrer que, sauf pour certaines valeurs particulières de n , les courbes représentatives de f_n ont deux points communs et ont même tangente en chacun de ces points.

Partie B

On se limite dorénavant à la restriction g_n de f_n à l'intervalle $[0; 1]$:

$$\forall x \in [0; 1], \quad g_n(x) = x^n(1-x)$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé.

1. Montrer que, sauf pour une valeur de n , g_n possède un maximum M_n et que

$$M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

2. Tracer (C_0) , (C_1) , (C_2) relativement à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Donner l'allure de (C_n) pour $n \geq 2$; placer (C_{n+1}) , par rapport à (C_n) , sur un même schéma (position relative des points de même abscisse et des deux points représentatifs du maximum).

3. Calculer successivement :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$

b. $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

- c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$: pouvait-on prévoir ce résultat à l'aide d'un encadrement convenable de $g_n(x)$ et du résultat 3. b. ?

4. On pose $\forall x \in [0; 1], \quad S_n(x) = \sum_{i=0}^n g_i(x) dx$ et $J_n = \int_0^1 S_n(x) dx$.

- a. Calculer $S_n(x)$ en fonction de n et de x , puis

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

— J_n

— $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$

- b. Exprimer J_n en fonction de I_0, I_1, \dots, I_n . En déduire la valeur de la somme

$$s_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

- c. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$ et $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) dx$.

Partie C

On se place à présent dans le corps \mathbb{C} des complexes pour $n \in \mathbb{N}$; on pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad h_n(z) = z^n(1-z).$$

1. n étant différent de 0, résoudre l'équation : $h_n(z) = h_0(z)$.

2. On se propose de résoudre le système suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} h_n(z) &= 1 \\ |z| &= |1-z| \end{cases}$$

- a. Montrer que l'équation a une infinité de solutions.
- b. Soit z_0 l'une de ces solutions ; calculer, en fonction du module ρ et de l'argument φ de z_0 l'argument de $1-z_0$, le module et l'argument de $z_0^n (1-z_0)$.
- c. En déduire que le système (I) n'admet de solution que si n est congru à 1 modulo 6.
Quel est alors l'ensemble des solutions de ce système ?