

## ∞ Baccalauréat C Grenoble septembre 1977 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$ , le reste de la division par 7 de  $5^n$ .
2. En déduire le reste de la division par 7 de  $5^{136}$ .
3. Un nombre s'écrit  $\overline{3x53}$  en base 10. Déterminer  $x$  pour que l'on ait

$$5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0 \pmod{7}.$$

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $f$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui, au point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$ , fait correspondre le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y'; z')$  tel que :

$$\begin{cases} x' &= -z + 1 \\ y' &= x - 4 \\ z' &= -y \end{cases}$$

Démontrer que  $\vec{f}$  est composée d'une rotation  $\mathcal{R}$ , d'axe  $\delta$ , et d'une translation  $T$ , de vecteur  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}$  étant un vecteur directeur de  $\delta$  (autrement dit,  $f$  est un vissage). Déterminer  $\delta$  et  $\vec{v}$ .

### PROBLÈME

13 POINTS

#### Partie A

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de l'addition et de la multiplication externe par un scalaire, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , dont on notera  $\underline{0}$  l'élément nul.

Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels, on note  $g_{a,b}$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$g_{a,b}(x) = (a \cos x + b \sin x)$$

et on note  $f_{a,b}$  l'application définie par :

$$f_{a,b}(x) = e^{-x} g_{a,b}(x) = e^{-x} (a \cos x + b \sin x).$$

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des applications  $f_{a,b}$  lorsque  $a$  et  $b$  parcourent  $\mathbb{R}$ .

1.
  - a. Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace de  $\mathcal{F}$ .
  - b. Montrer que les deux applications  $e_1 = f_{1,0} (x \mapsto e^{-x} \cos x)$  et  $e_2 = f_{0,1} (x \mapsto e^{-x} \sin x)$  forment une base de  $\mathcal{E}$ .
2.
  - a. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}$ ; montrer que sa fonction dérivée est élément de  $\mathcal{E}$ .

On note  $D$  l'application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui à tout élément de  $\mathcal{E}$  associe sa fonction dérivée; montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $\mathcal{E}$  et calculer la matrice de  $D$  dans la base  $(e_1, e_2)$ .

- b. Montrer que  $D$  admet une application réciproque  $D^{-1}$ , dont on déterminera la matrice dans la base  $(e_1, e_2)$ . En déduire que tout élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  a une primitive et une seule dans  $\mathcal{E}$ .
- c. *Application* : trouver la primitive dans  $\mathcal{E}$  de l'application  $f = f_{2, -4}$  (définie par  $f(x) = e^{-x}(2 \cos x - 4 \sin x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ )
3. Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{E}$ , et  $f'$  et  $f''$  ses dérivées première et seconde.
- a. Montrer, sans calcul, qu'il existe trois nombres réels  $\alpha, \beta, \gamma$ , non tous nuls tels que

$$(1) \quad \alpha f + \beta f' + \gamma f'' = \underline{0}.$$

- b. Déterminer un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de nombres réels non tous nuls, indépendants de  $f$ , pour lequel (1) est satisfaite,
- c. Utiliser ce résultat pour retrouver la matrice de  $D^{-1}$  dans la base  $(e_1, e_2)$ .
4. Soit  $P$  un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Au point  $M$  de coordonnées  $(a; b)$  de  $P$  on associe le nombre complexe  $z = a + ib$ , appelé affixe de  $M$ . Soit  $\varphi$  la bijection de  $\mathcal{E}$  sur  $P$  qui à  $f_{a, b}$  associe le point  $M$  de coordonnées  $(a; b)$  de  $P$ , et soit  $T = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$ . Si  $M$  est le point de coordonnées  $(a; b)$ , on note  $(a'; b')$  les coordonnées du point  $M' = T(M)$ . On se propose d'étudier  $T$ .
- a. Exprimer  $(a'; b')$  en fonction de  $(a; b)$ , et l'affixe  $z'$  de  $M'$  en fonction de l'affixe  $z$  de  $M$ .
- b. Quelle est la nature de l'application  $T$  ?

### Partie B

On considère la courbe  $(C)$ , ensemble de points de  $P$  dont les coordonnées  $(x; y)$  satisfont à la relation  $(y - \cos x)^2 = \cos 2x$ .

1. Étudier les variations des fonctions  $\phi_+$  et  $\phi_-$  définies par

$$\phi_+(x) = \cos x + \sqrt{\cos 2x}, \quad \text{et} \quad \phi_-(x) = \cos x - \sqrt{\cos 2x}$$

(on pourra admettre qu'aux points d'abscisse  $x$  telle que  $\cos 2x = 0$ , la courbe  $(C)$  admet une tangente de vecteur directeur  $\vec{j}$ ).

Comment peut-on déduire la partie de  $(C)$  située dans l'ensemble des points dont l'abscisse  $x$  vérifie  $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$  de la partie de  $(C)$  située dans l'ensemble des points dont l'abscisse  $x$  vérifie  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  ?

Construire la courbe  $(C)$ .

2. On note  $(C_{a, b})$  la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto g_{a, b}(x)$ . On pose  $t = \operatorname{tg} x$ . Montrer que pour que les courbes  $(C)$  et  $(C_{a, b})$  aient un point commun d'abscisse  $x$ , il faut et il suffit que  $t$  satisfasse à une équation du second degré  $(E_{a, b})$  qu'on déterminera.
3. On dira que les courbes  $(C)$  et  $(C_{a, b})$  sont tangentes si l'équation  $(E_{a, b})$  admet une racine double. Montrer que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que  $a$  et  $b$  satisfassent à une équation du second degré, qu'on déterminera.
4. Soit  $(H)$  l'ensemble des points  $M$  de  $P$  dont les coordonnées  $(a; b)$  vérifient  $a^2 - b^2 - 2a = 0$ . Montrer que  $(H)$  est une hyperbole, dont on précisera les sommets et les foyers.
- Quelle est la nature de l'image  $(H')$  de  $(H)$  par  $T$  ?
- Soit  $U$  l'application de  $P$  dans  $P$  qui au point  $M$  associe le milieu du bipoint  $(M; T(M))$ .
- Quelle est la nature de  $U$  ? Quelle est la nature de l'image  $(H'')$  de  $(H)$  par  $U$  ?