

❧ Baccalauréat C Lyon juin 1977 ❧

EXERCICE 1

5 POINTS

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

e représentant la base des logarithmes népériens.

1. Étudier f et construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthononné.
2. Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

où λ est un nombre réel strictement positif.

Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

3 POINTS

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(x; y) = 8 \end{cases}$$

PROBLÈME

12 POINTS

Dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère l'application affine f_h laissant invariant le point O et dont l'endomorphisme associé est φ_h de matrice $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 1 & h \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{i}) , h étant un réel donné.

Partie A

1. Si M est un point de P de coordonnées $(x; y)$ et $M_1 = f_h(M)$ coordonnées $(x_1; y_1)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , montrer que

$$\begin{cases} x = hx \\ y = x + hy \end{cases}$$

Déterminer les points invariants de f_h .

L'application f_h est-elle bijective ?

2. On considère l'application f_0 correspondant à $h = 0$ et Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer qu'il existe une application g de P dans P telle que $f_0 = g \circ S_\Delta$ où S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à δ et caractériser g .
3. On suppose $h \neq 0$ dans toute la suite du problème.

Caractériser $f_{-h} \circ f_h$.

Soit D_1 la droite d'équation $y = -x$ et D la droite d'équation $y = 0$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit S_1 la symétrie orthogonale par rapport à D_1 et S_2 la symétrie orthogonale par rapport à D_2 . Déterminer géométriquement la nature de l'application $T = S_2 \circ S_1 \circ f_h \circ f_h$ puis en préciser la caractérisation.

4. Si S_y est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (O, \vec{j}) et si S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$, soit :

$$U = f_h \circ S_y \circ f_h \circ S_\Delta.$$

Calculer en fonction des coordonnées $(x; y)$ d'un point M , les coordonnées $(X; Y)$ de son image $U(M)$. Soit $z = x + iy$ l'affixe de M et $Z = X + iY$ celle de $U(M)$.

Calculer Z en fonction de z . En déduire la nature de U et préciser sa caractérisation.

Partie B

On considère l'application f_1 correspondant à $h = 1$.

On a donc

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= x + y \end{cases}$$

1. Soit M un point de P n'appartenant pas à la droite (O, \vec{j}) , soit H sa projection orthogonale sur la droite (O, \vec{j}) et soit $M_1 = f_1(M)$. Déterminer les directions des droites HM_1 et MM_1 et en déduire une construction simple de M_1 connaissant M .
2. Soit H la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 9$ dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer la nature de H et construire H .
3. Déterminer l'équation de la courbe H_1 image de H par f_1 . Mettre cette équation sous la forme $x = F(y)$ où F est une fonction que l'on déterminera. En déduire les asymptotes de H_1 .

Vérifier que ces asymptotes ont pour vecteurs directeurs respectifs \vec{i} et $\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{k}$.

Déterminer l'équation de H_1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{k}) . Reconnaître la nature de H_1 . Construire H_1 sur le même dessin que H .

Partie C

Soit M_0 un point donné de P ,

$$M_1 = f_h(M_0), \quad M_2 = f_h(M_1), \quad \dots, \quad M_n = f_h(M_{n-1})$$

pour tout entier naturel n . On notera $(x_0; y_0)$ les coordonnées de M_0 , $(x_1; y_1)$ celles de $M_1, \dots, (x_n; y_n)$ celles de M_n .

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$\begin{cases} x_n &= h^n x_0 \\ y_n &= nh^{n-1}x_0 + h^n y_0 \end{cases}$$

Montrer que si $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$, on a :

$$y_n = x_n(\alpha \text{Log } x_n + \beta)$$

où α et β sont des constantes indépendantes de n que l'on calculera en fonction de h , x_0 et y_0 ($\text{Log } x_n$ représente le logarithme népérien de x_n).

2. On suppose $x_0 > 0$, $h > 0$ et $h \neq 1$. Que faut-il imposer de plus à h pour que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente? Dans ces conditions trouver la limite de cette suite et montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également convergente et trouver sa limite.