Baccalauréat C Lyon septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x(1 - \text{Log}\,|x|).$$

1. Étudier ses variations.
2. Construfire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
3. Calculer l'aire de la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & \text{e} \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

e étant la base des logarithmes népériens.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On considère, l'application f qui, à tout point $M(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{ccl} x' & = & x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' & = & x\sqrt{3} + y + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Démontrer que f est une similitude et déterminer les éléments caractéristiques de f.

PROBLÈME **12 POINTS**

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre.

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et de sa structure d'anneau unitaire.

Partie A

1. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer son carré.
2. On désigne par I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble F des matrices de la forme $A = \alpha\text{I} + \beta J$ où α et β sont des nombres réels.
3. **a.** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}$, et que (I, J) est une base de F.

   b. Montrer que F est stable pour la multiplication dans $\mathscr{M}$, et en déduire que F est un anneau commutatif et unitaire. Cet anneau est-il un corps ?

Partie B

On appelle ψ l'application de F dans $\mathbb{C}$ qui, à toute matrice $A = \alpha\text{I} + \beta J$ de F, associe le nombre complexe $z = \alpha + \beta\text{i}$.

1. **a.** Montrer que ψ est un isomorphisme de $(F, +)$ sur $(\mathbb{C}, +)$.

   b. L'application ψ est-elle un isomorphisme de $(F, \times)$ sur $(\mathbb{C}, \times)$?

2. Aux deux nombres complexes $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $z' = \alpha' + \mathrm{i}\beta'$, l'application ψ^{-1} fait correspondre les deux matrices $A = \alpha \mathrm{I} + \beta J$ et $A' = \alpha' \mathrm{I} + \beta' J$.
On considère la loi de composition interne dans $\mathbb{C}$, notée $\star$ et définie par

$$z \star z' = \psi\left(A \times A'\right).$$

   a. Exprimer $(\alpha + \mathrm{i}\beta) \star (\alpha' + \mathrm{i}\beta')$.

   b. Quelle est la restriction de la loi $\star$ à $\mathbb{R}$?

   c. Quelle est la restriction de la loi $\star$ à l'ensemble des imaginaires purs ?

3. Etant donné un nombre complexe z, on note $z^{(0)} = 1$, $z^{(1)} = z$ et $z^{(n)} = z^{(n-1)} \star z$ pour tout entier naturel non nul n.

   a. Calculer $\mathrm{i}^{(2)}$ puis $\mathrm{i}^{(n)}$ pour $n > 2$.
   En posant $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, démontrer que $z^{(n)} = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta\mathrm{i}$ pour $n \geqslant 1$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$z^{(2)} = 1\ ;\ z^{(3)} = 1\ ;\ z^{(n)} = 1\ ;\ z^{(2)} - z - \mathrm{i} = 0.$$

4. Dans le plan complexe, on considère le point M_1 d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et les points $M_2, M_3, \cdots, M_n$ d'affixes respectives $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$, $z_n = z_1^n$.
Calculer les coordonnées x_n et y_n du point M_n, puis les limites respectives des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C

Soit P le plan vectoriel euclidien orienté de base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et soit f l'endomorphisme de P de matrice $A = \alpha\mathrm{I} + \beta J$ et soit φ l'endomorphisme de matrice J.

1. **a.** À quelle condition f est-il un automorphisme de P ?

   b. Quel est le noyau de φ ? Quelle est l'image de φ ?

2. **a.** Soit ρ la rotation vectorielle de P dont la mesure (élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) admet pour représentant $\dfrac{\pi}{4}$.
   On considère les vecteurs $\vec{i_1} = \rho\left(\vec{\imath}\right)$ et $\vec{j_1} = \rho\left(\vec{\jmath}\right)$ qui forment donc une base $\left(\vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$ orthonormée directe. Exprimer $\vec{i_1}$ et $\vec{j_1}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$.

   b. Démontrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}$.
   En déduire la matrice de φ dans la base $\left(\vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$. Soit $\vec{V} = x\vec{i_1} + y\vec{j_1}$.
   Quelles sont les composantes du vecteur $\varphi\left(\vec{V}\right)$ dans la base $\left(\vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$?

   c. Démontrer qu'il existe une homothétie vectorielle h, une rotation vectorielle r et un projecteur p tels que $\varphi = h \circ r \circ p$.