∽ Baccalauréat C Maroc juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **6 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2\sqrt{|\text{Log}\, x|} & \text{si} & x \neq 0\\ 0 & \text{si} & x = 0\end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction f. On sera amené à calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right),\quad \lim_{x \to 1^-}\left(\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}\right),\quad \lim_{x \to 1^+}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x}\right)$$

3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Trouver tous les entiers naturels dont le cube divise 18 360.
2. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{N}$, la résolution de l'équation, (d'inconnue b)

$$b^3\left[b^2 + (b+1)^2\right] = 18360.$$

3. Existe-t-il un nombre b tel que le nombre qui s'écrit 36 723 dans le système décimal s'écrive $\overline{442003}$ dans le système de numération à base b ?

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie A

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère l'application affine S_1 de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x\,;\ y)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -3x + \sqrt{3}y\\ y' & = & -\sqrt{3}x - 3y\end{array}\right.$$

1.
   a. Soit les nombres complexes z et z' affixes des points M et M' $(z = x + \text{i}y\ ;\ z' = x' + \text{i}y')$. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Préciser la nature de l'application S_1 et ses éléments caractéristiques.
2. On considère la suite de points :

$$P_0(1\ ;\ 0),\quad P_1 = S(P_0),\quad P_2 = S(P_1),\quad \ldots\quad ,\quad P_n = S(P_{n-1})$$

   Les coordonnées de P_n étant notées $\left(\alpha_n\ ;\ \beta_n\right)$.

   a. Quelle est la nature de l'application qui transforme P_0 en P_n ?

   b. Déterminer α_n et β_n en fonction de n.
3. Soit (C) la courbe d'équation : $x^2 - y^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}xy - 1 = 0$.

   Déterminer une équation de la courbe (C') transformée par S_1 de la courbe (C). Quelle est la nature de (C') ?

Partie B

Soit S l'application de P dans P qui au point $N(x\ ;\ y)$ fait correspondre le point $N'\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & \alpha x - \beta y + a \\ y' & = & \beta x + \alpha y + b \end{array}\right. , \quad \alpha,\ \beta,\ a,\ b \text{ étant quatre réels.}$$

1. **a.** À quelle condition S est-elle une similitude ? Préciser dans ce cas son rapport et son angle.

b. On considère la suite de points

$$A_0\left(u_0\ ;\ v_0\right),\ u_0 \neq 0, \quad A_1 = S\left(A_0\right), \quad \ldots \quad , \quad A_n = S\left(A_{n-1}\right)$$

Les coordonnées de A_n sont notées $(u_n\ ;\ v_n)$. On définit ainsi deux suites (u) et (v).

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\},\ u_{n+1} - u_n = \alpha\left(u_n - u_{n-1}\right) - \beta\left(v_n - v_{n-1}\right).$$

2. Dans cette question, on pose $\beta = 0$. Soit la suite (ω) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega_n = u_{n+1} - u_n.$$

a. Vérifier que (w) est une suite géométrique.

b. Écrire u_n en fonction de n, u_0, α et a. On pourra calculer

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i.$$

c. Pour quelles valeurs de α la suite (u) est-elle convergente ? Quelle est alors sa limite ?

3. Dans cette question $\beta = a = 0$.

a. Discuter la nature de l'application S, suivant les valeurs de α.

b. Déterminer dans ces différents cas les coordonnées de l'isobarycentre G_n des points $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

c. Étudier la limite du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}G_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, suivant les valeurs de α.