Baccalauréat C Montpellier juin 1977

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Soit E Un plan affine muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On appelle $(x\,;\,y)$les coordonnées d'un point M dans ce repère.
Soit $P = \left\{M \in \text{E}/x^2 - 2y = 0\right\}$.

1. Vérifier que $\vec{T} = \vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de la tangente à P au point Ω d'abscisse λ ?
   Montrer que pour tout λ, $\left(\vec{T}, \vec{\jmath}\right)$ forme un système libre.
2. Déterminer, en fonction de λ et des coordonnées x, y d'un point M les coordonnées x', y' du point M' image de M par la symétrie oblique f_λ d'axe $\mathcal{D}\left(\Omega, \vec{\jmath}\right)$ et de direction $\vec{T}$.
3. Montrer que $f_\lambda(P) = P$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. l'equation $3x \equiv 1 \pmod 5$
2. l'équation $5x \equiv 2 \pmod 7$
3. le système formé par les deux équations précédentes.

PROBLÈME **12 POINTS**

(le 3. peut être traité indépendamment des autres questions).

1. Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2} \end{array}$
   Étudier f et tracer sa représentation graphique C dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:
   $$f(x) + f'(x) = \text{e}^x$$
   $$[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1$$
2. Soit M un point de C d'abscisse x_0. $(x_0 \in \mathbb{R}'_+)$.
   Soit m le point de coordonnées $(x_0\,;\,0)$ et P la projection orthogonale de m sur la droite Δ tangente en M à C.
   Déterminer en fonction de x_0 les coordonnées de P et vérifier que ces coordonnées peuvent s'écrire :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & x_0 - \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \\ Y & = & \dfrac{1}{f(x_0)} \end{array}\right.$$
   Calculer $\left\|\overrightarrow{mP}\right\|$.

3. Soit la fonction
$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \text{Log}\left[\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right]-\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que :

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

b. Étudier F et tracer la représentation graphique Γ de F dans le plan P rapporté au même repère.
Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$ (on ne demande pas de déterminer F^{-1}).
Construire la représentation graphique T de F^{-1} sur la même figure.

4. **a.** Montrer que le point P est sur la courbe T. (on pourra utiliser le 1.).

b. Montrer que m appartient à la tangente en P à la courbe T.