

Baccalauréat C Montpellier septembre 1977

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit l'équation :

$$e^x - 2e^{-x} = m \quad (m \in \mathbb{R})$$

(e est la base des logarithmes népériens)

1. Exprimer x en fonction de m .
2. Pour $m = \frac{1}{2}$, calculer la valeur approchée de x avec la précision donnée par la table de logarithmes.

EXERCICE 2

5 POINTS

\mathcal{P} est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les applications :

$$f': \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array} \quad f'': \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M'' \end{array}$$

où M, M' et M'' ont respectivement pour affixes z, z' et z'' avec :

$$\begin{aligned} z' &= (2 - 2i)z + 1 \\ z'' &= (2 + 2i)\bar{z} + 1 \end{aligned}$$

1. Reconnaître f' et f'' et trouver leurs éléments canoniques.
2. Calculer \bar{z}' ; comparer \bar{z}' et z'' , en déduire que $f'' = s \circ f'$ où s désigne la symétrie orthogonale ayant pour axe la droite de repère (O, \vec{i}) .
3.
 - a. Construire la courbe (Γ) d'équation $4x^2 - 4y^2 = 1$.
 - b. Déterminer les équations cartésiennes de $f'(\Gamma)$ et $f''(\Gamma)$.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2 + 3x + 6}{2x - 4} \end{array}$

1. Montrer qu'il existe a, b, c réels tels que, pour tout x différent de 2 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 4}.$$

2. Étudier la fonction f , construire la courbe représentative C dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Montrer que C admet une asymptote oblique et un centre de symétrie ω .
3. Déterminer l'équation $Y = F(X)$ de la courbe C dans le repère $(\omega, \vec{i}, \vec{i})$.
 - a. Montrer que le produit XY des coordonnées d'un point de C par rapport au repère $(\omega, \vec{i}, \vec{i})$, est strictement supérieur à 8.
 - b. Discuter, selon les valeurs du paramètre t , l'intersection de la droite D_t d'équation $Y = tX$ et de la courbe C . Exprimer en fonction de t les coordonnées $(X; Y)$ des points d'intersection quand ils existent.
Retrouver en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto XY$ le résultat du a.

4. H désigne la courbe qui a pour équation $y = \frac{8}{x-2}$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Soit v_n l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équations $x = 6$, $x = 6 + n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et les courbes C et H .

- Exprimer v_n en fonction de n .
- Montrer que la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En déduire la somme $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ en fonction de n .

- Montrer que le plus petit entier naturel n satisfaisant à la condition $s_n > 100$ est 6.

5. On considère maintenant la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10, \quad u_1 = \frac{4}{5}f(u_0), \dots, u_n = \frac{4}{5}f(u_{n-1}).$$

Calculer u_1 .

- Exprimer $u_n - 2$ en fonction de u_{n-1} .
Montrer que $(u_n - 2)(u_{n-1} - 2)$ est positif quel que soit n et en déduire que $u_n - 2$ est positif quel que soit n .
Calculer $u_n - 6$ et montrer que $u_n - 6$ est positif quel que soit n .
- Démontrer l'inégalité : 2

$$u_n - 6 < \frac{(u_{n-1} - 6)^2}{10}$$

[On pourra chercher le signe de la différence $\frac{(u_{n-1} - 6)^2}{10} - (u_n - 6)$].

- En raisonnant par récurrence prouver que :

$$u_n - 6 < 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2^n}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.