∽ Baccalauréat C Montréal–New–York juin 1977 ∾

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe $u = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}$.

1. Mettre u sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.
2. Déterminer par la méthode algébrique les nombres complexes X tels que $X^2 = u$, puis les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.
3. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives :

$$(1\ ;\ 1)\qquad(-3\ ;\ 3)\qquad(2\ ;\ 2)\qquad(-4\ ;\ 4)$$

On appelle E et F les milieux respectifs de (A, C) et (B, D).

1. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathcal{R}$ qui transforme A en B et C en D.
   Déterminer son angle et son centre I.
2. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique $\mathcal{R}'$ qui transforme A en D et C en B.
   Déterminer son angle et son centre J.
3. Que peut-on dire du quadrilatère IEJF ?
   Etudier $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par

$$\left\{\begin{array}{lrcl}\forall x \in]-\infty\ ;\ 0[, & f(x) & = & 1 - \text{e}^x\\ \forall x \in]0\ ;\ \infty[, & f(x) & = & \dfrac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x + 1}\\ & f(0) & = & 0\end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$. Étudier la dérivabilité en 0.
   b. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. **a.** Vérifier que :

$$\forall x \geqslant 0,\qquad f(x) = \dfrac{\text{e}^{\frac{x}{2}} - \text{e}^{-\frac{x}{2}}}{\text{e}^{\frac{x}{2}} + \text{e}^{-\frac{x}{2}}}.$$

   Déterminez une primitive de la restriction de f à $[0\ ;\ +00[$

b. On considère un réel λ ($\lambda > 0$).
M étant un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ déterminez l'aire $\mathscr{A}_\lambda$ de l'ensemble des points M vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \lambda \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

c. $\mathscr{A}_\lambda$ a-t-elle une limite finie lorsque λ tend vers $+\infty$?

3. **a.** Soit $y \in]0\ ;\ 1[$.
Montrer que y admet exactement deux antécédents x et z par f tels que $xz < 0$.
Calculer z en fonction de x lorsque $x > 0$
Calculer z en fonction de x lorsque $x < 0$

b. Étudiez le cas $y = 0$

c. Soit, φ ainsi définie

$$\left\{\begin{array}{rccc} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) & = & z \\ & \varphi(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exprimer $\varphi(x)$.
Étudiez la continuité de φ.
Montrer que φ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur $]-\infty\ ;\ 0]$. φ est-elle dérivable en 0 ?
Etudiez la limite de $\varphi(x) + x - \text{Log}\,2$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Qu'en déduire pour la courbe (Γ) représentative de φ dans $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$?
La tracer.

Partie B

Plus généralement, soit une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :
α. f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$
β. $\forall x \in]-\infty\ ;\ 0[$, $\quad f'(x) < 0$
γ. $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[\quad f'(x) > 0$
δ. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On note f_1 la restriction de f à $[0\ ;\ +\infty[$ et f_2 sa restriction à l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.
Justifier l'existence de f_1^{-1} et de f_2^{-1}.
Ceci permet de démontrer que tout y appartenant à $\left]f(0)\ ;\ \ell\right[$ admet exactement deux antécédents x et z par f tels que $xz < 0$.

2. Soit φ définie par

$$\left\{\begin{array}{rccc} \forall x \in \mathbb{R}^\star, & \varphi(x) & = & z \\ & \varphi(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que $\quad \forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_2^{-1} \circ f(x)$
$\qquad\qquad\qquad \forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_1^{-1} \circ f(x)$

Étudier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\star$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}.$$

Étudiez les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
Établir que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$.

4. Montrer que $\varphi \circ \varphi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ ($\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$: fonction identité de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Qu'en déduire pour la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé ?
5. Peut-on déterminer simplement une famille de fonctions f telle que l'application φ associée soit $-\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$?