Baccalauréat C Nantes septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, euclidien, de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\imath}, \vec{k}\right)$.

1. On envisage l'application linéaire f de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} f\left(\vec{\imath}\right) & = & -\frac{7}{9}\vec{\imath} + \frac{4}{9}\vec{\jmath} - \frac{4}{9}\vec{k}\\ f\left(\vec{\jmath}\right) & = & \frac{4}{9}\vec{\imath} - \frac{1}{9}\vec{\jmath} - \frac{8}{9}\vec{k}\\ f\left(\vec{k}\right) & = & -\frac{4}{9}\vec{\imath} - \frac{8}{9}\vec{\jmath} - \frac{1}{9}\vec{k}\end{array}\right.$$

   a. Démontrer que f est une isométrie vectorielle.

   b. Déterminer l'ensemble des vecteur de E invariants par f.

   c. Déterminer $f\left(\vec{\jmath} + \vec{k}\right)$.

   d. Caractériser f.

2. Soit g la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{\jmath} + \vec{k}$.
   Caractériser l'application h, égale à $g \circ f$.
3. e désignant l'identité dans E, démontrer que l'ensemble $\{e,\ f,\ g,\ h\}$, muni de la loi ($\circ$) de composition des applications, est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnue x :

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^{x} + 5 = 0 \pmod{11}.$$

PROBLÈME **13 POINTS**

P est un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ dont les axes Ox et Oy sont dirigés respectivement par $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

1. m étant un réel positif non nul, étudier, en discutant par rapport à m la nature de l'application T_m de P vers P définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & y + \mathrm{Log}\, m;\\ y' & = & x + \mathrm{Log}\, m.\end{array}\right.$$

   Log m désigne le logarithme népérien de m.
   Existe-t-il des droites invariantes par T_m, soit point par point, soit globalement ?
2. **a.** Étudier, quand x tend vers $+\infty$, les limites des fonctions (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{l c l} x & \longmapsto & -x + \mathrm{Log}\,(\mathrm{e}^{x} - 1) \text{ et}\\ x & \longmapsto & -x + \mathrm{Log}\,(\mathrm{e}^{x} + 1)\end{array}$$

b. On considère la fonction $f_1 \left\{\begin{array}{l c l}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \text{Log}\,(\text{e}^x + 1)\,.\end{array}\right.$

Étudier les variations de f_1 ; et en tracer la courbe représentative (C_1) dans le plan P rapporté au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

c. On considère la fonction $g_1 \left\{\begin{array}{l c l}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \text{Log}\,|\text{e}^x - 1|\,.\end{array}\right.$

Étudier les variations de g_1 et en tracer la courbe représentative (C'_1) dans le plan P rapporté au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

d. Démontrer que T_1 laisse invariant l'ensemble $(C_1) \cup (C'_1)$.

3. Soit m un réel positif non nul. Démontrer que l'image par T_m de l'ensemble $(C_1) \cup (C'_1)$ est la réunion des courbes (C_m) et (C'_m) représentant respectivement les fonctions f_m et g_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \text{Log}\left(\text{e}^x + m\right) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \text{Log}\left|\text{e}^x - m\right|.$$

Construire $(C_{\text{e}}) \cup (C'_{\text{e}})$.

4. Étudier les variations de la fonction $h : \left\{\begin{array}{l c l}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f_1(x) - x - \text{e}^{-x}.\end{array}\right.$.

En déduire le signe de $h(x)$.

Si m est un réel positif non nul, on envisage l'aire $\mathscr{A}(m)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$0 \leqslant x \leqslant m \quad \text{et} \quad x \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

Démontrer que $\mathscr{A}(m)$ est comprise entre 0 et 1 (on ne demande pas le calcul de cette aire).

Remarque : $\text{Log}\,2 \approx 0,7$; $\text{Log}\,(\text{e} - 1) \approx 0,5$;
$\text{Log}\,(\text{e} + 1) \approx 1,3$; $\text{Log}\left(\text{e}^2 - 1\right) \approx 1,9$; $\text{Log}\left(\text{e}^2 + 1\right) \approx 2,1$.