

## Baccalauréat C Paris juin 1977

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Quel est le reste de la division par 8 du nombre  $7^n$ ,  $n$  désignant un entier naturel quelconque ?
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que le nombre  $7^n \cdot n + 4n + 1$  soit divisible par 8 ?

### EXERCICE 2

4 POINTS

1. Soit  $n$  un entier naturel. Une variable aléatoire  $X_n$  peut prendre les  $n$  valeurs

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

et elles seules, avec probabilités égales.

Calculer l'espérance mathématique de  $X_n$  et trouver sa limite éventuelle quand  $n \rightarrow +\infty$ .

2. Soit  $f$  une fonction numérique, définie et continue sur le segment  $[0; 1]$ .  
Une variable aléatoire  $Y_n$  peut prendre les  $n$  valeurs

$$f\left(\frac{1}{n}\right), f\left(\frac{2}{n}\right), \dots, f\left(\frac{k}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n}{n}\right)$$

et elles seules, avec probabilités égales.

Écrire l'espérance mathématique  $E(Y_n)$  de  $Y_n$ . Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n)$  existe : l'exprimer sous forme d'une intégrale.

3.  $p$  étant un entier au moins égal à 1, calculer la limite de

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

### PROBLÈME

13 POINTS

Soit :

$\mathbb{C}^*$  l'ensemble des nombres complexes non nuls,

$E$  un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ,

$E^*$  le plan privé de  $O$ .

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}^*$  qui, à  $z$ , associe  $f(z) = \frac{1}{z^2}$

et l'application  $F$  de  $E^*$  dans  $E^*$  qui, à tout point  $m$  d'affixe  $z$ , associe le point d'affixe  $Z$  où  $Z = \frac{1}{z^2}$ .

#### Partie A

1. Soit un nombre complexe  $z$ , de module  $r$  non nul et d'argument  $\theta$ . Montrer que  $Z$  s'écrit

$$Z = \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta).$$

2. L'application  $f$  est-elle surjective? Est-elle injective? Etudier l'équation  $z = f(z)$ .
3. a. On désigne par  $m$  un point de  $E^*$  dont l'affixe a pour module 1.  
Construire son image par  $F$ .  
Représenter les points invariants par  $F$ .
- b. Étant donné un point  $M$  de  $E^*$  dont l'affixe a pour module 1, quel est l'ensemble des points  $m$  tels que  $F(m) = M$ ? Construire ces points.
4. a. Soit  $(d)$  une demi-droite de  $E$ , d'origine  $O$ . Construire l'image par  $F$  de  $(d^*)$ , où  $(d^*)$  désigne  $d$  privée du point  $O$ .  
Quelle est l'image par  $F$  d'une droite passant par  $O$ , mais privée de  $O$ ?
- b. Étant donné, dans  $E$ , une droite  $(\Delta)$  passant par  $O$ , quel est l'ensemble des points  $m$  tels que  $F(m)$  appartienne à  $(\Delta^*)$ , où  $(\Delta^*)$  désigne  $(\Delta)$  privée de  $O$ ?

### Partie B

On considère l'ensemble  $(\gamma)$  des points de  $E^*$  dont l'affixe est

$$z = -2 \cos^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta,$$

où  $\theta$  décrit l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$ .

1. Démontrer que  $(\gamma)$  est inclus dans un cercle passant par  $O$ .
2. Donner, en fonction de  $\theta$ , le module et un argument de l'affixe  $z$  d'un point  $m$  de  $(\gamma)$ .  
Exprimer, en fonction de  $\tan \theta$ , les coordonnées  $X$  et  $Y$  de  $F(m)$ .  
En déduire l'équation de l'image  $(\Gamma)$  de  $(\gamma)$  par l'application  $F$ .  
Quelle est la nature de  $(\Gamma)$ ?  
Vérifier que les points  $I$  et  $J$  de  $(\gamma)$  définis respectivement par  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  et  $\theta = \frac{4\pi}{3}$  appartiennent à  $(\Gamma)$ . En expliquer la raison.