Baccalauréat C Poitiers juin 1977

Exercice 1 **3 points**

Un dé cubique a quatre faces noires et deux faces blanches. Quand on lance ce dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. On lance ce dé cinq fois de suite.

1. Quelle est la probabilité pour que la face blanche apparaisse pour la première fois au cinquième jet ?
2. Quelle est la probabilité pour que la face blanche apparaisse au moins une fois ?
3. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque épreuve fait correspondre le nombre de faces noires obtenues.
   Quelle est la loi de probabilité de X ?
   Calculer son espérance mathématique.

Exercice 2 **4 points**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \text{Log}\,|x+1|.$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(on précisera les branches infinies).
2. Soit D l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées x et y vérifient :

$$-2 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant y \leqslant x \quad \text{où } \lambda \in]-2\,;\,-1[.$$

   Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de D. Quelle est sa limite lorsque λ tend vers -1 par valeurs inférieures ?

Problème **13 points**

On considère un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'axes $x'x$ et $y'y$.
Soit $a = \alpha + \text{i}\beta$ un nombre complexe. On appelle A le point d'affixe a et A$'$ le point d'affixe $-a$. On appelle C_a l'ensemble des points M de P d'affixe $z = x + \text{i}y$ telle que $\left(z^2 - a^2\right)$ soit un nombre réel.
On appelle C'_a l'ensemble des points M de P d'affixe z telle que $\left(z^2 - a^2\right)$ soit un nombre imaginaire pur. Dans tout le problème α, β, x et y sont réels.

Partie A

1. Déterminer l'intersection de C_a et C'_a.
2. Donner une équation de C_a et une équation de C'a .
3. Déterminer C_a lorsque a^2 est réel. Quelle est la nature de C_a lorsque a^2 n'est pas réel ?
4. Déterminer C'_a lorsque a^2 est imaginaire pur. Quelle est la nature de C'_a lorsque a^2 n'est pas imaginaire pur ?

Partie B

On suppose dans toute la suite du problème que $a^2 = 4(1-\text{i})$ et que A a une ordonnée négative. Dans ce cas particulier on désignera par H la courbe C_a et par H' la courbe C'_a.

1. **a.** Donner une équation de H'. Représenter H' en précisant ses sommets, ses foyers F'_1 et F'_2 et ses asymptotes.

b. Donner une équation de H. Représenter H (sur la même figure que H') en précisant ses sommets, ses foyers F_1 et F_2 et ses asymptotes.

2. Calculer le module et un argument de a. En déduire une mesure de l'angle des droites $\left(x'x,\ \text{AA}'\right)$.

3. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite AA'.

a. Calculer les coordonnées de $M' = S(M)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de M.

b. Montrer que $S(H) = H'$ et que $S\left(\{\text{F}_1,\ \text{F}_2\}\right) = \left\{\text{F}'_1,\ \text{F}'_2\right\}$.

4. Soit K l'ensemble $\left\{\text{F}_1, \text{F}_2, \text{F}'_1, \text{F}'_2\right\}$. Trouver l'ensemble G des isométries de P qui laissent K invariant. Vérifier que tout élément de G laisse $H \cup H'$ invariant.

5. Étant donné un nombre réel t supérieur à 2, on se propose de calculer l'aire de la partie E' du plan P comprise entre H' et la droite D' d'équation $x = t$.

a. Donner une équation de la droite D image de D' par S et calculer les abscisses x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$ des points d'intersection de D et H.

b. Soit E la partie du plan P comprise entre H et la droite D. Calculer l'aire de E en fonction de t.

c. Exprimer l'aire de E' par une intégrale.

En admettant que E et E' ont même aire, déduire une primitive de l'application f de $[2\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$