Baccalauréat C Polynésie juin 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit l'espace linéaire p de P, espace vectoriel réel, dans lui-même de matrice A relativement à la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & a\overrightarrow{\imath} + d\overrightarrow{\jmath}\\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & b\overrightarrow{\imath} + c\overrightarrow{\jmath}\end{array}\right.$$

où a, b, c, d sont quatre nombres entiers strictement positifs.
Sachant que a, b, c, d sont dans cet ordre des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q, q étant strictement supérieur à 1 et premier avec a, déterminer la matrice A pour que son déterminant soit égal à : $-9a^3$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit V un espace vectoriel euclidien de base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormée et E un espace affine associé à V muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère f l'application affine de E dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1\\ y' & = & \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1\\ z' & = & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1\end{array}\right.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ de V associé à f conserve la norme.

2. Montrer que φ est involutif et caractériser φ.

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et préciser si f est involutive.

4. Soit s l'application affine d'endomorphisme associé φ et telle que $s(\text{O}) = \text{O}$.

  a. Caractériser s.

  b. Préciser l'endomorphisme associé à $f \circ s$, en déduire la nature de $t = f \circ s$ et montrer que f est la composée de deux applications que l'on précisera.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On considère la fonction φ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}\,(1+x)$$

(où Log est le logarithme népérien).

1. Montrer que φ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$,dont on donnera l'image $\varphi\left(\mathbb{R}_+\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.

2. Étudier la branche infinie (on utilisera l'égalité $1+x=x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$ pour $x>0$) et tracer la courbe représentative (C), dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité choisie : 2 cm).

Partie B

On considère maintenant que (P) est un plan affine euclidien et que le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est orthonormé. Soit le mouvement d'un point M de (P) dont les coordonnées sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t-1\\ y & = & 1-\dfrac{1}{t}-\text{Log}\, t \quad \text{avec } t \geqslant 1.\end{array}\right.$$

t désignant le temps.

1. Trouver la trajectoire (C') du point M (on précisera le sens de parcours).
2. Déterminer $(H)=\{m\in(\text{P})|\quad \overrightarrow{\text{O}m}=\overrightarrow{\text{V}(t)}\}$, $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ désignant levecteur-vitesse de M à l'instant t .
3. Déterminer dans quels intervalles de temps le mouvement est accéléré, retardé.
   Tracer dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les vecteurs-vitesse et accélération à la date $t=1$.

Partie C

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=\text{e}^{-x}\text{Log}\left(1+\text{e}^{x}\right).$$

Soit (C'') la courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)>0$. Que peut-on dire alors de (C'') ?
2. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi\left(\text{e}^{x}\right)$. En déduire le sens de variation de la fonction f.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $u=\text{e}^{x}$. En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$?
4. En utilisant l'égalité $1+\text{e}^{x}=\text{e}^{x}\left(\text{e}^{-x}+1\right)$, trouver la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Tracer (C") dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
   On donne Log $3,72\approx 1,31$ et Log $8,39\approx 2,12$.
6. Soit l'intégrale $F(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,\text{d}x$.
   a. Montrer qu'il existe des réels b et c tels que

   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{\text{e}^{x}}{1+\text{e}^{x}}=b+\frac{c}{1+\text{e}^{x}}.$$

   Au moyen d'une intégration par parties, ramener le calcul de $F(a)$ au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\text{e}^{x}}{1+\text{e}^{x}}\,\text{d}x$.
   En déduire $F(a)$.

   b. $a>0$. Que représente $F(a)$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}F(a)$.

c. $a < 0$. Que représente $F(a) - a$? Étudier l'existence et donner s'il y a lieu, la valeur de $\lim\limits_{a \to -\infty} (F(a) - a)$.

Partie D

On considère les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}.$$

1. Montrer que la fonction f définie au C vérifie (1) .

2. On considère les fonctions f vérifiant (1) de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$. Trouver la relation (2) vérifiée par les fonctions g. Quelle est l'expression des fonctions g ?

3. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant (1).