Baccalauréat C Reims juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x) & = & x\,\mathrm{e}^{x} & \text{si} & x \leqslant 0 \\ f(x) & = & x\,\mathrm{Log}\,x - 2x & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

1. Étudier la continuité de f.
2. Étudier la dérivabilité de f.
3. Étudier complètement la fonction f et construire sa représentation graphique dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm) .

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé, on appelle affixe de tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, et l'on pose $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

1. Déterminer l'ensemble des points M de P dont l'affixe z vérifie la relation

$$\left|2\mathrm{i}\overline{z} - 1 - \mathrm{i}\right| = \sqrt{2}.$$

2. Soit T l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2\mathrm{i}\overline{z} - 1 - \mathrm{i}$.
   a. Montrer que T admet un point invariant Ω unique.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$.
   c. Indiquer alors la nature et les éléments géométriques précis de l'application T.
3. Utiliser la question 2. pour retrouver les résultats de la question 1. par une méthode géométrique.

PROBLÈME **12 POINTS**

Etant donné un espace vectoriel $\mathscr{E}$ de base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ on note $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathscr{E}$. Soit f et $f_{a,\,b}$ les éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ définis par

$$f\ \left\{\begin{array}{l} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}\right) \\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}\right) \\ f\left(\overrightarrow{k}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{k}\right) \end{array}\right. \qquad f_{a,\,b}\ \left\{\begin{array}{l} f_{a,\,b}\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{\imath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\jmath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{k} \\ f_{a,\,b}\left(\overrightarrow{\jmath}\right) = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\imath} + \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{\jmath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{k} \\ f_{a,\,b}\left(\overrightarrow{k}\right) = \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\imath} + \dfrac{a}{3}\overrightarrow{\jmath} + \left(\dfrac{a}{3} + b\right)\overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

L'application $\left|\begin{array}{lcl} \mathscr{E} & \to & \mathscr{E} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}\right.$ sera notée e,

l'application $\left|\begin{array}{lcl} \mathscr{E} & \to & \mathscr{E} \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{0} \end{array}\right.$ sera notée θ.

Partie A

1. Déterminer le noyau, l'image et l'ensemble des vecteurs invariants par f. En déduire que f est une projection que l'on caractérisera. Montrer que $f \circ f = f$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des endomorphismes de $\mathbb{C}$ du type $f_{a,\,b}$ lorsque a et b décrivent $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ et que $(f,\,\mathrm{e})$ est une base de $\mathcal{F}$. Comment s'écrit $f_{a,\,b}$ dans cette base ?
3. Montrer que $\mathcal{F}$, muni de l'addition des applications et de la composition (notée $\circ$) des applications, est un anneau unitaire. Cet anneau est-il commutatif ? Cet anneau est-il un corps ? (On rappelle que $\mathcal{L}(\mathcal{E})$, muni de l'addition et de la composition, est un anneau unitaire).
4. Soit $\varphi = \alpha f + \beta \mathrm{e}$ un élément de $\mathcal{F}$. On pose

$$\varphi = \varphi^1 \quad \text{et} \quad \varphi^n \circ \varphi = \varphi^{n+1} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \varphi^n = \left[(\alpha+\beta)^n - \beta^n\right] f + \beta^n \mathrm{e}.$$

5. Déterminer les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont involutifs. Préciser la nature et les éléments de ces involutions.

Partie B

On suppose dans cette partie que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien, que $\left(\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ en est une base orthonormée, et que E est un espace affine de repère $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
Soit O′ le point de E de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.
Soit s l'application affine de E dont l'endomorphisme associé est $f_{-2,\,1}$ et telle que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{O}'$.

1. Déterminer l'image par s du point I de E de coordonnées $(1\,;\,-1\,;\,1)$.
2. Montrer que s est une isométrie involutive dont on précisera la nature et les éléments géométriques.
3. Soit Q le plan affine d'équation $2x - y - z + 3 = 0$. Déterminer l'image de Q par s.

   (Pour déterminer l'image de Q par s on pourra définir sa position par rapport aux éléments de s ou employer une méthode analytique).