Baccalauréat C Rennes septembre 1977

EXERCICE 1 **3,5 POINTS**

Une épreuve consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu ordinaire (jeu de piquet) de 32 cartes ; on suppose que toutes les cartes ont la même chance d'être tirées. On associe à cette épreuve un espace $(\Omega, \mathscr{B}, \text{P})$ comprenant 32 éventualités, tel que $\mathscr{B} = \mathscr{P}(\Omega)$ et dans lequel tous les singletons sont équiprobables.

1. X est une variable aléatoire numérique définie sur Ω qui ne peut prendre que les 4 valeurs : $0,\ 1,\ 2$ ou 3.
   On sait que :
   il existe dans $(\Omega, \mathscr{B}, \text{P})$ deux évènements A et B tels que :
   $\text{P}(A) = \text{P}(B) = \dfrac{1}{2}$
   $\text{P}(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$
   $A = \{\omega\ \text{X} > 1\}$ si $\omega \in B$, si $\omega \in B$, $X(\omega) \in \{1,\ 3\}$.
   $\text{P}(\text{X} = 1) \leqslant \text{P}(X = 2)$
   $\text{P}(\text{X} = 0) = \dfrac{3}{8}$.
   Montrer que ces données suffisent pour connaître la loi de probabilité de X et déterminer cette loi en calculant pour chaque valeur k que peut prendre X la probabilité $\text{P}_k = \text{P}(\text{X} = k)$.
2. On sait également que X ne dépend que de la valeur de la carte tirée (as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept) et non de sa couleur (trèfle, carreau, coeur, pique) ; qu'elle prend la valeur 3 si l'on tirer une figure (roi, dame, valet) ; que sa valeur est la même pour tous les tirages possibles d'une basse carte (sept, huit, neuf) ; enfin que la valeur prise par X lorsqu'on tire l'as de pique est strictement supérieure à la valeur correspondant au tirage d'un dix, d'un neuf, d'un huit ou d'un sept. Quels sont les évènements A et B ?

EXERCICE 2 **2,5 POINTS**

On pose :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}\,\text{d}x, \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x}\,\text{d}x, \quad I_1 + I = I_2$$

1. Calculer I_2 ;
2. Calculer I_1 ;
3. En déduire I.

PROBLÈME **14 POINTS**

P est un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct.
À tout point m de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère est associé le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ appelé affixe du point m. On appelle A et B les points de P d'affixes respectives i et $-$i.

Partie A

1. On considère la relation de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui associe au complexe z le complexe $\dfrac{z-\text{i}}{z+\text{i}}$. Montrer que tout complexe distinct de $-\text{i}$ (c'est-à-dire tout élément de $\mathbb{C}-\{-\text{i}\}$) a une image et que toute image est un complexe distinct de 1 (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{C}-\{1\}$).
2. Soit φ l'application de $\mathbb{C}-\{-\text{i}\}$ dans $\mathbb{C}-\{1\}$ définie par :

$$\varphi(z)=\frac{z-\text{i}}{z+\text{i}}.$$

   Montrer que φ est bijective.
3. Quel est le sous-ensemble P_1 de P des points m dont l'affixe z vérifie la propriété $|\varphi(z)<1$?
4. k étant un nombre réel donné vérifiant $0\leqslant k<1$, montrer que le sous-ensemble P_2 de P_1 des points m dont l'affixe z vérifie la propriété $|\varphi(z)|=k$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Partie B

On désigne par U l'ensemble des nombres complexes de module 1.
À tout élément $u=a+\text{i}b$ $(a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$ de cet ensemble, on fait correspondre la fonction f_u associant à tout point m d'affixe z de P_1 le point M de P_1 d'affixe Z telle que :

$$Z=\frac{az-b}{bz+a}.$$

1. Vérifier que, quel que soit l'élément u de U, f_u est définie en tout point de P_1, que c'est une bijection de P_1 sur P_1. Montrer qu'il existe un point de P_1, et un seul, qui soit invariant par chaque f_u quel que soit $u\in U$. On désigne l'ensemble des bijections f_u par E.
2. Soit g l'application de U dans E définie par $g(u)=f_u$.
   Montrer que tout élément de E est l'image par g de deux éléments de U.
   Si $g(u)=g\left(u'\right)$, $u'\neq u$, quelle relation existe-t-il entre u et u' ?
3. Rappeler la structure de $(U,\times)$ (c'est-à-dire U muni de la multiplication des complexes).
   Etant donné un élément de E correspondant à u, élément de U : f_u montrer que la bijection réciproque f_u^{-1} est un élément de E. Quels sont les éléments de U qui correspondent à cette bijection réciproque f_u^{-1} (c'est-à-dire quels sont les éléments v de U tels que $g(v)=f^{-1}$?
   Montrer que l'identité de P_1 est élément de E. Quels sont les éléments correspondants de U ?
   u_1 et u_2 étant deux éléments de U, montrer que $f_{u_2}\circ f_{u_1}$ est élément de E.
   En déduire la structure de l'ensemble E muni de la loi de composition des applications : $(E,\circ)$.
   Que peut-on conclure de cette étude pour l'application g définie à la question précédente ?
4. Dans cette question, on se place dans le cas $u=\text{i}$.
   Γ étant le cercle de centre O et de rayon 1, on pose $\Gamma_1=\Gamma\cap\text{P}_1$. Quelle est l'image de Γ_1 par f_i ?
   À quelle transformation ponctuelle simple se réduit la restriction de f_i à Γ_1.
   D étant la droite d'équation $x+py=0$ $(p\in\mathbb{R})$, on pose $D_1=D\cap\text{P}_1$. Quelle est l'image de D_1 par f_i ?

Partie C

On définit dans l'ensemble P_1 la relation binaire $\mathscr{R}$ de la manière suivante :
M_1 et M_2 étant deux points quelconques de P_1, $M_{J1}\mathscr{R}M_{22}$ signifie qu'il existe une bijection fu telle que : $M_2 = f_u\left(M_1\right)$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans P_1.
2. On se propose de définir les classes d'équivalence déterminées dans P_1 par la relation $\mathscr{R}$.

   m_0 étant un point quelconque de P_1, on désigne par $C\left(m_0\right)$ sa classe d'équivalence.

   Soit z_0 l'affixe de m_0 et z l'affixe d'un point quelconque M de $C\left(m_0\right)$.

   Établir que z vérifie une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi\left(z_0\right)$ où α est un élément de U. Réciproquement, montrer que tout point M de P_1 d'affixe z vérifiant une relation de la forme $\varphi(z) = \alpha\varphi\left(z_0\right)$ où $|\alpha| = 1$ appartient à $C\left(m_0\right)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire $|\varphi(z)|$ pour que le point M d'affixe z appartienne à $C\left(m_0\right)$.

   Déterminer la classe d'équivalence du point m_0.

   Quelle est, en particulier, la classe d'équivalence du point A ?