Baccalauréat C Rouen septembre 1977

EXERCICE 1 **2 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$1+\text{Log}\,(x+3) > \text{Log}\left(x^2+2x-3\right)$$

Log désignant la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un clochard suit une route indéfiniment bordée d'arbres alignés, distants les uns des autres de 10 mètres. Il décide au cours de sa promenade, de jouer au jeu suivant : devant chaque arbre, il lance son unique pièce de monnaie ; si c'est pile, il continue dans la même direction, si c'est face, il rebrousse chemin, jusqu'à l'arbre voisin. Au bout de 6 déplacements, il s'endort au pied de l'arbre où il est.
On appelle x la distance arithmétique, en mètres, entre l'arbre devant lequel il commence son jeu et l'arbre d'arrivée.
Quelles sont les valeurs possibles prises par x ? Dresser la loi de probabilité de cette variable aléatoire sachant que la pièce n'est pas truquée.
Quelle est la distance ayant la plus grande probabilité ?
Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

Soit P un plan vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}=\left(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. On considère l'endomorphisme φ de P ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}$

$$A=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 12 & 10\end{pmatrix}$$

1. Trouver les nombres réels λ tels qu'il existe au moins un vecteur $\vec{u}$ non nul de P vérifiant $\varphi(\vec{u})=\lambda.\vec{u}$.
   Déterminer l'ensemble El des vecteurs $\vec{v}$ et l'ensemble E2 des vecteurs $\vec{w}$ qui vérifient respectivement $\varphi(\vec{v})=\vec{v}$ et $\varphi(\vec{w})=2\vec{w}$.
2. Soit les vecteurs $\vec{e_1}=3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$ et $\vec{e_2}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$.
   Après avoir vérifié que $\left(\vec{e_1}\,,\ \vec{e_2}\right)$ est une base de P, que l'on notera $\mathcal{B}'$, et précisé si elle est orthonormée ou non, établir la matrice B de l'application φ dans cette base $\mathcal{B}'$.
3. Soit α l'endomorphisme de P tel que $\alpha(\vec{\imath})=e_1$ et $\alpha(\vec{\jmath})=e_2$.
   Notant R la matrice de l'application α dans la base $\mathcal{B}$, déterminer R ainsi que la matrice inverse R^{-1}de R.
   Vérifier que $A=R\cdot B\cdot R-1$.

Partie B

Soit $\mathcal{M}$ le plan affine euclidien, de plan vectoriel euclidien associé P, rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}=\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
M_0 étant un point donné du plan $\mathcal{M}$ on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points du plan définie de la façon suivante :

notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(x_n\,;\,y_n\right)$ les coordonnées du point M_n dans le repère $\mathcal{R}$, alors

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_n &=& -7x_{n-1} - 6y_{n-1}\\ y_n &=& 12x_{n-1} + 10y_{n-1}\end{array}\right.$$

1. Démontrer que selon la position de M_0, les points M_n sont ou bien tous confondus, ou bien tous distincts et alignés sur une droite affine que l'on déterminera.
2. La distance du point M au point O a-t-elle pour limite l'infini lorsque n tend vers l'infini ?
3. Calculer la limite lorsque n tend vers l'infini de

$$\frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{x_n^2 + y_n^2}$$

Partie C

Soit a un nombre réel non nul. On note S l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, et satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ à la condition $f'(x) = af(x)$.

1. Montrer que l'application f_a définie par $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$ appartient à S.
2. f étant un élément quelconque de S, quelle est l'application dérivée de l'application $h = \dfrac{f}{f_a}$?

   En déduire que f est de la forme $k \cdot f_a$ où k est un nombre réel.

   Trouver toutes les applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, satisfaisant pour tout $x \in \mathbb{R}$ aux deux conditions

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'(x) &=& -7f(x) - 6g(x)\\ g'(x) &=& 12f(x) + 10g(x).\end{array}\right.$$