

## Baccalauréat C Toulouse juin 1977

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5 929.
2. Trouver les couples  $(a ; b)$  d'entiers naturels dont le P. G. C. D. et le P. P. C. M. sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 91x + 588 = 0.$$

### EXERCICE 2

5 POINTS

1. Soit  $\varphi$  la fonction réelle de variable réelle, qui, à  $x$ , associe

$$\varphi(x) = x^2 + \text{Log } x$$

Déduire de l'étude de ses variations que cette fonction s'annule pour une seule valeur  $x_0$  de la variable, comprise entre  $\frac{1}{e}$  et 1. (On ne cherchera pas à calculer  $x_0$ ).

2. Soit  $f$  la fonction réelle de variable réelle, qui, à  $x$ , associe

$$f(x) = 1 - x + \frac{1 + \text{Log } x}{x}.$$

Étudier les variations de  $f$ . Montrer que la représentation graphique  $C$  de  $f$  dans un repère orthonormé d'axes  $Ox$  et  $Oy$ , admet deux asymptotes, dont l'une  $D$  n'est pas parallèle à  $Oy$ ; préciser la position de  $C$  par rapport à  $D$ .

(On ne cherchera ni la valeur du maximum, ni les abscisses des points d'intersection avec  $Ox$ , ni le point d'inflexion).

3. Construire  $C$ .
4. Calculer l'aire de l'ensemble  $E$  des points  $M(x ; y)$  définis dans le repère  $(Ox, Oy)$  par

$$\frac{1}{e} \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1 - x + \frac{1 + \text{Log } x}{x}.$$

On utilisera les valeurs numériques  $\frac{1}{e} \approx 0,368$  ;  $\frac{1}{e^2} \approx 0,134$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

Soit  $P$  un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et soit  $\mathcal{V}$  l'espace vectoriel associé.

1. On considère l'ensemble  $E$  des points  $m$  de  $P$  dont les coordonnées  $( ; y)$  vérifient l'équation

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Identifier  $E$ , déterminer ses foyers, les directrices associées et l'excentricité.

2. Soit  $s$  l'application affine de  $P$  dans  $P$  qui au point  $M(X; Y)$  associe le point  $M'(X'; Y')$  défini par les formules

$$s \quad \begin{cases} X' &= \frac{3}{5}X + \frac{8}{5}Y \\ Y' &= \frac{2}{5}X - \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

- a. Démontrer que  $s$  est bijective et déterminer  $s^{-1}$ ; en déduire la nature de  $s$  et les éléments géométriques qui la caractérisent.  
 b. Démontrer que  $E$  est globalement invariante par  $s$ .
3. Soit  $g$  l'application affine de  $P$  dans  $P$  définie par :

$$g \quad \begin{cases} X' &= \frac{3}{5}X - \frac{8}{5}Y \\ Y' &= \frac{2}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$$

- a.  $u$  étant la symétrie orthogonale d'axe  $x'Ox$ , démontrer que  $g = s \circ u$ .  
 b. Établir que  $E$  est globalement invariante par  $g$ .
4. Étude de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications affines  $f$  de  $P$  dans  $P$  laissant  $E$  globalement invariante.

- a. Montrer que toute application  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}$  est bijective. En utilisant le fait qu'une ellipse admet un centre de symétrie unique, prouver que, pour toute application  $f$  appartenant à  $\mathcal{F}$ ,  $f(O) = O$ .

Montrer que  $\mathcal{F}$  est un groupe pour la loi de composition des applications.

- b. Montrer que l'application  $a$  définie par

$$a: \quad \begin{cases} X' &= X \\ Y' &= 2Y \end{cases}$$

transforme  $E$  en un cercle  $C$ ; déterminer  $a^{-1}$ .

- c. Prouver que  $a \circ f \circ a^{-1}$  transforme  $C$  en  $C$ . Montrer que les transformations affines qui conservent  $C$  sont les isométries affines laissant  $O$  invariant. En déduire que :

$a \circ f \circ a^{-1}$  est de la forme

$$\begin{cases} X' &= X \cos \alpha + \epsilon Y \sin \alpha \\ Y' &= X \sin \alpha - \epsilon Y \cos \alpha \end{cases} \quad \text{où } \epsilon = \pm 1$$

En déduire la forme générale des équations de  $f$ . Quelles sont les valeurs de  $\alpha$  et de  $\epsilon$  qui donnent les applications  $s$  et  $g$ ?