

∞ Baccalauréat C Toulouse septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit E l'anneau $Z/33Z$; la classe d'un entier n sera notée \overline{n} .

1. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$f(x) = \overline{17}x + \overline{9}.$$

Trouver l'inverse de $\overline{17}$.

Résoudre dans E l'équation : $f(x) = \overline{0}$.

Montrer que f est une bijection dont on donnera la bijection réciproque.

2. Soit g l'application de E dans E définie par :

$$g(x) = \overline{22}x + \overline{7}.$$

Quel est l'ensemble des images des éléments de E par g ?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soient f et g les fonctions numériques de la variable réelle x définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 1 + \frac{\text{Log } x}{x} \\ g(x) &= x^2 + 1 - \text{Log } x. \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x , on a : $g(x) > 0$.
(On pourra montrer que g passe par un minimum strictement positif).
Étudier la fonction f et la représenter graphiquement dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
Construire les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 1 et e .
2. Calculer l'aire $F(a)$ du domaine limité par la courbe représentative de f et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 1$ et $x = a$ (a étant un réel strictement positif),
Déterminer a pour que $F(a)$ soit égale à 1.

PROBLÈME

12 POINTS

)

Partie A

Soit V un plan vectoriel euclidien de base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) .

À tout nombre réel k , on associe l'endomorphisme F_k de V dont la matrice relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) est

$$A_k = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2+2k & 4k-1 \\ 4-k & -2-k \end{pmatrix}$$

Soient $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ deux vecteurs de V .

1. Montrer qu'il existe un réel positif λ tel que $\vec{u}' = \lambda \vec{u}$, $\vec{v}' = \lambda \vec{v}$ forment une base orthonormée directe de V .
Déterminer les images par F_k de \vec{u} et \vec{v} .
En déduire pour quelle valeur de k l'application F_k n'est pas bijective; déterminer alors son image et son noyau.
2. Pour quelle valeur de k , l'application F_k est-elle involutive? Caractériser l'application obtenue.
3. Pour quelles valeurs de k , l'application F_k est-elle une transformation orthogonale? Caractériser chaque fois l'application obtenue,

Partie B

Soit P le plan affine euclidien de repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'affixe du point M de P de coordonnées $(x; y)$ est le nombre complexe $z = x + iy$, ($i^2 = -1$).

1. Soit f l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' déterminée par :

$$z' = \frac{4 + 3i}{5} \bar{z} - 1 + 3i \quad (\bar{z} = x - iy \text{ est le conjugué de } z = x + iy)$$

Montrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite dont on donnera l'équation,

2. À tout réel non nul α , on associe l'application g_α et qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' donnée par : $z' = i\alpha z + 2$.
 - a. Reconnaître la nature de l'application g_α et la caractériser. Soit ω_α le point invariant de g_α . Quel est l'ensemble des points ω_α quand α décrit l'ensemble des réels non nuls? (On pourra utiliser l'image O' du point O par g_α).
 - b. On définit, pour tout entier naturel n , le point M_n par $M_0 = O$,
 $M_{n+1} = g_{\frac{1}{2}}(M_n)$.
Soit $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe de M_n et a l'affixe du point A , point invariant de $g_{\frac{1}{2}}$.
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = |z_n - a|$ est géométrique.
($|z_n - a|$ désigne le module du nombre complexe $z_n - a$).
En déduire les limites des suites (u_n) , (x_n) et (y_n) quand n tend vers l'infini.