

❧ Baccalauréat C Vientane juin 1977 ❧

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Soit f et g deux fonctions numériques définies au moins dans un intervalle ouvert non vide de centre x_0 . On sait que l'implication (1) :

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } x_0 \end{array} \right| \Rightarrow fg \text{ continue en } x_0$$

est vraie.

L'implication (2)

$$fg \text{ discontinue en } x_0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ discontinue en } x_0 \\ \text{ou} \\ g \text{ discontinue en } x_0 \end{array} \right|$$

est-elle vraie ?

2. a. Soit F la fonction numérique définie dans $[0; 1]$ par

$$\begin{array}{l} \forall x \in \left[0; \frac{1}{6}\right] : F(x) = 6x^2 + x + 1 \\ \forall x \in \left[\frac{1}{6}; 1\right] : F(x) = \frac{6x+3}{2x+5} \end{array}$$

Étudier la continuité de F en $\frac{1}{6}$.

- b. Soit G et H les fonctions numériques définies par :

$$\forall x \in [0; 1] : \begin{array}{l} G(x) = \cos 3\pi x \\ H(x) = \cos 4\pi x \end{array}$$

Étudier la continuité des fonctions produit FG et FH en $\frac{1}{6}$.

3. L'implication (3) :

$$fg \text{ continue en } x_0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ continue en } x_0 \\ \text{et} \\ g \text{ continue en } x_0 \end{array} \right|$$

est-elle vraie quelles que soient les fonctions numériques f et g définies au moins dans un intervalle ouvert non vide de centre x_0 ?

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère l'application f :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ (}\mathbb{C} \text{ ensemble des nombres complexes)} \\ z \mapsto z^4 - z^3 + z^2 + 2 \end{array} \right.$$

1. a. Montrer que si l'équation (1) : $f(z) = 0$ admet pour racine le nombre complexe α , elle admet aussi pour racine $\bar{\alpha}$.
- b. Montrer que $1 + i$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont racines de l'équation (1).
- c. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1) ?
En déduire une factorisation de $f(z)$.

2. Montrer que f est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

PROBLÈME**4 POINTS**

Soit un plan vectoriel euclidien \mathcal{P} rapporté à une base orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) . On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ des endomorphismes de \mathcal{P} , (applications linéaires de \mathcal{P} dans \mathcal{P}), muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Partie A

1. Soit p, q, s les éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ définies dans la base (\vec{i}, \vec{j}) par :

$$\begin{cases} p(\vec{i}) = \vec{i} \\ p(\vec{j}) = \vec{0} \end{cases} \quad \begin{cases} q(\vec{i}) = \vec{0} \\ q(\vec{j}) = \vec{i} \end{cases} \quad \begin{cases} s(\vec{i}) = \vec{j} \\ s(\vec{j}) = \vec{i} \end{cases}$$

Montrer que p et q sont des projections. Quelle est la nature de s ?

2. Soit E le sous-espace de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ engendré par p, q, s . Quelle est la dimension de E ?
3. On note F le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ constitué par les endomorphismes f tels que $\vec{i} \cdot f(\vec{j}) = \vec{j} \cdot f(\vec{i})$.
- Montrer que f est élément de F si, et seulement si, sa matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ où a, b, d désignent trois nombres réels.
 - Montrer que $F = E$.
4. Soit f un élément de F de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ où a, b, d dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . À tout réel λ on associe l'ensemble E_λ des vecteurs \vec{u} de \mathcal{P} tels que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{P} .
 - Montrer qu'il existe en général deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$.
 - Préciser la nature des endomorphismes correspondant aux cas d'exception.
5. a. Établir l'implication :

$$f \in F \Rightarrow \forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \forall \vec{v} \in \mathcal{P}, \vec{u} \cdot f(\vec{v}) = \vec{v} \cdot f(\vec{u}).$$

- b. Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs de λ (distinctes) trouvées au 4. b., montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Partie B

Dans cette question on étudie le cas particulier $f = p + 2s - 2q$.

- Quelle est la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ? f est-elle bijective ?
- Déterminer λ_1 et λ_2 (on choisira $\lambda_1 < \lambda_2$) et vérifier que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont deux droites vectorielles orthogonales dont on donnera l'équation dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

On note \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deux vecteurs unitaires de E_{λ_1} et E_{λ_2} respectivement. Quelle est la matrice de f dans la base orthonormée (\vec{u}_1, \vec{u}_2) ?

Partie C

On appelle P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel \mathcal{P} et soit O un point de \mathcal{P} .

1. Étudier la fonction g :

$$g: \begin{cases} R & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{2}{5}(-x^3 - 3\sqrt{-x^2 + 25}) \end{cases}$$

et tracer son graphique C dans le plan P rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prendra 1 cm pour unité).

2. Soit φ l'application affine de P telle que son endomorphisme associé soit l'endomorphisme f étudié en B, et telle que $\varphi(O) = O$.

a. Montrer que φ est bijective et déterminer analytiquement φ^{-1} .

b. Soit C la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 5 = 0$ par rapport à (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle C' l'image de C par φ . Déterminer une équation de C' par rapport à (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Montrer que C' est la réunion de C'_1 et d'une courbe C'_2 dont on déterminera une équation. Prouver que C'_1 et C'_2 sont symétriques par rapport à O . En déduire le tracé de C' .

c. Caractériser géométriquement la courbe C . Quelle est son équation dans le plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ? En déduire une équation de C' par rapport à ce repère. Étudier alors la nature de C' . Quels sont les axes de symétrie de C' ? Les tracer sur la figure faite en b.