

∞ Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1978 ∞

EXERCICE 1

Un plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On appelle D (respectivement Δ) la droite passant par O dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{i} \cos \theta - \vec{j} \sin \theta$).

1. Pour tout point M de P , démontrer qu'il existe un et un seul bipoint (P, Q) dont M soit le milieu tel que $P \in D$ et $Q \in \Delta$.
2. On appelle Q' (respectivement P') le projeté orthogonal de P (respectivement Q) sur Δ (resp. D) et M' le milieu du bipoint (P', Q') .
On désigne par S l'application de P dans P telle que $S(M) = M'$.
Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\vec{OP} = r\vec{u}$, $\vec{OQ} = r'\vec{v}$.
Calculer en fonction de r, r', θ , les coordonnées $(x; y)$ de M et $(x'; y')$ de M' .
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des triplets $X = (p, q, r)$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}^*$) tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application f de E dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes telle que

$$X \in E \longmapsto f(X) = \frac{p+iq}{r} = Z.$$

1. Calculer $|Z|$.
Montrer que, dans E , la loi notée \star , définie par

$$X_1 \star X_2 = (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_2 q_1 + p_1 q_2, r_1 r_2)$$
 avec $X_1 = (p_1, q_1, r_1)$ et $X_2 = (p_2, q_2, r_2)$ est une loi de composition interne.
Calculer $f(X_1 \star X_2)$. Montrer que f est un homomorphisme de (E, \star) dans (\mathbb{C}, \cdot) .
2. Vérifier que si $X_0 = (3, 4, 5)$, $X_0 \in E$.
Calculer $X_0 \star X_0$, $X_0 \star (X_0 \star X_0)$.
En déduire deux solutions, autres que X_0 , en nombres entiers positifs de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

PROBLÈME

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.

F désigne l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On rappelle que F muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Partie A

1. Soit u la fonction affine définie par :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto u(x) = ax + b \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que u vérifie la relation

$$(\forall (x; y), (x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad |u(x) - u(y)| \leq |a||x - y|.$$

2. Soit V la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto V(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Montrer que V vérifie la relation

$$(\forall(x; y), (x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad |V(x) - V(y)| \leq |x - y|.$$

3. Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue et bornée sur \mathbb{R} :

$$(\exists M, M \in \mathbb{R}_+, (\forall t, t \in \mathbb{R}), |f(t)| \leq M.$$

a. Montrer qu'il existe une fonction F , continue sur \mathbb{R} , définie par

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

b. Montrer que

$$(\forall(x; y), (x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad |F(x) - F(y)| \leq M|x - y|.$$

c. En déduire que les applications F_1 et F_2 définies par

$$\begin{aligned} F_1 : x &\longmapsto \sin x, \\ F_2 : x &\longmapsto \text{Log}(e^x + 1) \end{aligned}$$

vérifient respectivement

$$(\forall(x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad |F_1(x) - F_1(y)| \leq |x - y|, \quad |F_2(x) - F_2(y)| \leq |x - y|.$$

Partie B

On se propose d'étudier l'ensemble (L) des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la proposition :

$$(\forall f, f \in (L)), (\exists \lambda_f, \lambda_f \in \mathbb{R}_+), (\forall(x; y), (x; y) \in \mathbb{R}^2), \quad |f(x) - f(y)| \leq \lambda_f |x - y|.$$

1. Montrer que (L) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}, +, \cdot)$.
2. Établir que $(\forall f_1, f_1 \in (L)), (\forall f_2, f_2 \in (L)), f_2 \circ f_1 \in (L)$ où \circ désigne la composition des applications.
3. Montrer que toute application de (L) est continue en tout point de \mathbb{R} .

Partie C

1. Soit φ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$x \longmapsto \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3} \sin x.$$

Vérifier que

$$\forall(x; y), (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{3} |x - y|.$$

2. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad u_n = \varphi(u_{n-1}).$$

Établir que $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_n - \pi| \leq \frac{1}{3^n} |u_0 - \pi|$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. Donner sa limite.

Partie D

On définit les deux applications suivantes de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

$$\begin{aligned}\theta: x &\longmapsto e^{-x^2} \\ G: x &\longmapsto G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt\end{aligned}$$

1. Étudier la fonction θ . Tracer sa courbe représentative dans un repère ortho-normé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Démontrer que $(\forall t, t \in \mathbb{R}), e^{-t^2} \leq 1$.
En déduire que G appartient à (L) .
3. Démontrer que G est dérivable en tout point de \mathbb{R} .
Étudier le sens de variation de G .
4. Établir que

$$(\forall x, x > 1), \int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt.$$

En déduire que la fonction G est bornée et admet une limite ℓ (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$.