Baccalauréat C Aix–Marseille septembre 1978

EXERCICE 1

Un plan euclidien $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On appelle D (respectivement Δ) la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \vec{\imath}\cos(\theta) + \vec{\jmath}\sin\theta$ (respectivement $\vec{v} = \vec{\imath}\cos(\theta) - \vec{\jmath}\sin\theta$) avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$.

1. Pour tout point M de $\mathscr{P}$, démontrer qu'il existe un et un seul bipoint $(P ; Q)$ dont M soit le milieu et tel que $P \in$ D, $Q \in \Delta$
2. On appelle Q' (respectivement P') le projeté orthogonal de P (respectivement Q sur Δ (resp. D) et M' le milieu du bipoint $\left(P' ; Q'\right)$. On désigne par S l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ telle que $S(M) = M'$.
   Démontrer que S est bijective.
3. On pose $\overrightarrow{\text{O}P} = r\vec{u}$, $\overrightarrow{\text{O}Q} = r'\vec{v}$.
   Calculer en fonction de r, r', θ, les coordonnées $(x ; y)$ de M et $\left(x' ; y'\right)$ de M'.
4. Démontrer que S est une similitude indirecte dont on précisera le centre, l'axe et le rapport.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des triplets $X = (p, q, r)$ $\left(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}^{\star}\right)$ tels que $p^2 + q^2 = r^2$.
On définit l'application f de E dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes telle que $X \in \text{E} \longmapsto f(X) = \dfrac{p + \text{i}q}{r} = Z$.

1. Montrer que, dans E, la loi notée $\star$, définie par
   $$X_1 \star X_2 = \left(p_1p_2 - q_1q_2,\ p_2q_1 + p_1q_2,\ r_1r_2\right)$$
   avec $X_1 = \left(p_1, q_1, r_1\right)$ et $X_2 = \left(p_2, q_2, r_2\right)$ est une loi de composition interne.
   Calculer $f\left(X_1 \star X_2\right)$. Montrer que f est un homomorphisme de $(\text{E}, \star)$ dans $(\mathbb{C}, \cdot)$.
2. Vérifier que si $X_0 = (3, 4, 5)$, $X_0 \in$ E.
   Calculer $X_0 \star X_0$, $X_0 \star \left(X_0 \star X_0\right)$.
   En déduire deux solutions, autres que X_0, en nombres entiers positifs, de l'équation $p^2 + q^2 = r^2$.

PROBLÈME

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
$\mathscr{F}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que $\mathscr{F}$ muni de l'addition des applications et de la multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.

Partie A

1. Soit u la fonction affine définie par :
   $$x \in \mathbb{R}\ u(x) = ax + b\ (a ; b) \in \mathbb{R}^2.$$
   Montrer que u vérifie la relation
   $$\left(\forall (x ; y), (x ; y) \in \mathbb{R}^2\right), \quad |u(x) - u(y)| \leqslant |a| \cdot |x - y|.$$

2. Soit V la fonction définie par : $x \in \mathbb{R} \longmapsto V(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Montrer que V vérifie

$$\left(\forall (x\ ;\ y),\ (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2\right),\quad |V(x) - V(y)| \leqslant M|x-y|.$$

3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$:
$(\exists M,\ M \in \mathbb{R}_+),\ (\forall t,\ t \in \mathbb{R}),\ |f(t)| \leqslant M$.
   a. Montrer qu'il existe une fonction F, continue sur $\mathbb{R}$, définie par

$$x \in \mathbb{R},\quad f \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b. Montrer que $(\forall (x\ ;\ y),\ (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2),\ |F(x) - F(y)| \leqslant M|x-y|$.
   c. En déduire que les applications F_1 et F_2 définies par

$$\begin{array}{llll} F_1: & x & \longmapsto & \sin x, \\ F_2: & x & \longmapsto & \text{Log}\,(\mathrm{e}^x + 1)\,, \end{array}$$

   vérifient respectivement,
   $(\forall (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2),\ \left|F_1(x) - F_1(y)\right| \leqslant |x-y|,\quad \left|F_2(x) - F_2(y)\right| \leqslant |x-y|$.

Partie B

On se propose d'étudier ensemble (L) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant la proposition :

$$p : \left\{\forall f,\ f \in (L),\ (\exists \lambda_f,\ \lambda_f \in \mathbb{R}_+),\ \left(\forall (X,\ Y),\ (X,\ Y) \in \mathbb{R}^2\right), |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda_f |x-y|\right\}$$

1. Montrer que (L) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{F},\ +,\ \cdot)$.
2. Établir que $(\forall f_1,\ f_1 \in (L)), (\forall f_2,\ f_2 \in (L)),\ f_2 \circ f_1 \in (L)$ où $\circ$ désigne la composition des applications.
3. Montrer que toute application de (L) est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Partie C

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin x.$$

   Vérifier que $(\forall (x\ ;\ y), (x\ ;\ y) \in \mathbb{R}^2), |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \dfrac{1}{3}|x-y|$ et $\varphi(\pi) = \pi$.
2. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 \in \mathbb{R},\quad (\forall n,\ n \in \mathbb{N}^{\star}),\ u_n = \varphi\left(u_{n-1}\right).$$

   Établir que $(\forall n,\ n \in \mathbb{N}), |u_n - \pi| \leqslant \dfrac{1}{3^n}\,|u_0 - \pi|$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. Donner sa limite.

Partie D

On définit les deux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{llc} \theta: & x \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2}, \\ G: & x & G(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

(On ne cherchera pas à calculer $G(x)$).

1. Étudier la fonction θ. Tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Montrer que $(\forall t,~t \in \mathbb{R})$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$.
   En déduire que G appartient à (L).
3. Montrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G.
4. Établir que $(\forall x,~x \geqslant 1)$, $\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que la fonction G est bornée et damet une limite ℓ (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers plus l'infini.