Baccalauréat C Amiens septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a\ ;\ b\}$ qui vérifient

$$m - 16d = 1977$$

où m est le P.P.C.M. et d le P.G.C.D. des nombres a et b.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit l'application f de $[0\ ;\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

1. Étudier cette fonction. (On désignera par (γ) la courbe représentative que l'on tracera dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que la courbe (γ) obtenue est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

   $$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

   (On précisera le point de contact).
3. Évaluer l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ par rapport au repère $\mathcal{R}$, tels que :

   $$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \pi\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Le plan vectoriel euclidien orienté E est rapporté à la base orthonormée directe B $= \left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On désigne par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les droites vectorielles de bases respectives $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}$; par s_1, s_2, s_3, s_4 les symétries vectorielles orthogonales par rapport à ces droites vectorielles ; par r la rotation d'angle droit direct ; par $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$ l'identité dans E.

$\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans E. On rappelle que $(\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E}), +, \circ)$ est un anneau unitaire non commutatif et que $(\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

1. **a.** Écrire les matrices des applications $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$, r, s_1, s_2 dans la base B. Déterminer les applications $r\circ r$, ainsi que $r\circ s_i$ et $s_i\circ r$ pour $i\in\{1, 2\}$.

   b. Soit $f\in\mathcal{L}(\mathrm{E},\ \mathrm{E})$. On pose :

   $$\left\{\begin{array}{ccc} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & \alpha\overrightarrow{\imath}+\beta\overrightarrow{\jmath}\\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \gamma\overrightarrow{\imath}+\delta\overrightarrow{\jmath}\end{array}\right.$$

   Montrer qu'il existe un quadruplet unique (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ tel que :

   $$(1) \qquad f = a\cdot\mathbf{1}_{\mathrm{E}} + b\cdot r + c\cdot s_1 + d\cdot s_2.$$

(On calculera $(a,\ b,\ c,\ d)$ en fonction de $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$).
En déduire que $(\mathbf{1}_{\text{E}},\ r,\ s_1,\ s_2)$ constitue une base de l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(\text{E, E}), +, .)$.
Quelles sont les coordonnées de s_3 et s_4 dans cette base ?

c. On considère les deux applications de $\mathscr{L}(\text{E, E})$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & a\cdot\mathbf{1}_{\text{E}} + b\cdot r + c\cdot s_1 + d\cdot s_2 \\ g & = & a\cdot\mathbf{1}_{\text{E}} - b\cdot r - c\cdot s_1 - d\cdot s_2 \end{array}\right.$$

Montrer que $g\circ f = K\cdot \text{I}_{\text{E}}$ où K est un réel que l'on calculera en fonction de a, b, c, d. (On pourra, si on le désire, exprimer les matrices de $f, g, g\circ f$ dans la base B).
Montrer que f est bijective si, et seulement si : $a^2+b^2 \neq c^2+d^2$.
Déterminer alors f^{-1} par ses coordonnées dans la base $(\text{I}_{\text{E}},\ r,\ s_1,\ s_2)$.

d. Comment faut-il choisir $a,\ b,\ c,\ d$ pour que f soit involutive ?

e. On se place dans le cas où $a^2+b^2 = c^2+d^2$. Montrer que l'on a alors $f\circ f = \lambda f$ où λ est un réel.

2. **a.** On pose

$$\begin{array}{lcl} \varphi & = & a\cdot\mathbf{1}_{\text{E}} + b\cdot r \\ \psi & = & c\cdot s_1 + d\cdot s_2 \end{array}$$

Lorsque $(a\ ;\ b)$ décrit $\mathbb{R}^2$, φ décrit une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{L}(\text{E, E})$.
Lorsque $(c\ ;\ d)$ décrit $\mathbb{R}^2$, ψ décrit une partie $\mathscr{G}$ de $\mathscr{L}(\text{E, E})$.
Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{L}(\text{E, E})$.

b. À quelle condition φ est-elle bijective ? Montrer que φ est alors la composée d'une homothétie et d'une rotation vectorielle.
À quelle condition ψ est-elle bijective ? Comment peut-on alors la décomposer en deux applications simples ?

Partie B

Le plan affine euclidien P, de direction E, est rapporté au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Tout point $M(x\ ;\ y)$ de P peut être considéré comme image d'un nombre complexe $z = x+\text{i}y$.
$a,\ b,\ c,\ d$ étant 4 réels, on pose :

$$\begin{array}{lcl} u & = & a+\text{i}b \\ v & = & c+\text{i}d \end{array}$$

et on considère l'application $\begin{array}{llcl} F: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & uz+v\overline{z} \end{array}$

et l'application $\mathscr{T}$ de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $F(z)$.
On désigne par U et V les images, dans P, des complexes u et v.

1. Montrer que l'application linéaire associée à $\mathscr{T}$ est l'application f définie par l'égalité (1) en A 1. b.
2. On suppose $u = \text{i}$ et $v = 1$. Vérifier que $F\circ F$ est l'application nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Calculer $F(1)$. En déduire $F(\text{i}+v)$.
   Donner, à partir de la connaissance des points U et V , une construction des points M de P tels que l'on ait $\mathscr{T}(M)$= O.
   On fera une figure représentant l'ensemble de ces points M dans chacun des deux cas : $v \neq -\text{i}$; : $v = -\text{i}$.

3. On suppose $u = \text{i}$ et $|v| = \sqrt{2}$. Vérifier que F est involutive.
On désigne par B et C les points d'affixes respectives $1+\text{i}$ et $-1+\text{i}$.
Rechercher, sous forme trigonométrique, les éléments z de $\mathbb{C}$ pour lesquels $F(z) = z$, puis ceux pour lesquels $F(z) = -z$.
En déduire que $\mathcal{T}$ est une symétrie par rapport à la bissectrice de $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\,,\ \overrightarrow{\text{OV}}\right)$ parallèlement à la bissectrice de $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\,,\ \overrightarrow{\text{OV}}\right)$.

4. On considère de façon plus particulière l'application :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \text{i}z + (\text{i}-1)\overline{z} \end{array}$$

Préciser les éléments de la symétrie $\mathcal{T}$ associée à F