Baccalauréat C Besançon [1] juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ M est le point dont les coordonnées s'expriment en fonction du temps t par :

$$x = 2 + \cos t \quad \text{et} \quad y = 1 + 2\sin t$$

t décrit l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

1. Indiquer la nature de la trajectoire du point M et la dessiner dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
2. Déterminer, à l'instant t, le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Un plan affine euclidien E est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On appelle A le point de E d'affixe $i\sqrt{3}$ ($i^2 = -1$) et B le point de E d'affixe 1.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et B et t la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

1. M étant un point de E et M' son image par $t \circ s$, calculer l'affixe z' de M' en fonction de $\overline{z}$, conjugué de l'affixe z de M.
2. Soit D l'image de O par $t \circ s$.
   a. Calculer l'affixe de D.
   b. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DM}$ soient orthogonaux.
   c. Déterminer l'ensemble Γ des points M de E tels que $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \left\|\overrightarrow{DM'}\right\|$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on considère la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = e^x$.

1. Soit t un réel donné. La tangente à (C) au point M de (C) d'abscisse t coupe $y'Oy$ en un point N.
   a. Calculer, en fonction de t, les coordonnées $\left(x_t ; y_t\right)$ du barycentre G_t des points O, M et N affectés des coefficients respectifs -1, 1 et 2.
   b. Donner une équation cartésienne de l'ensemble des points G_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(3-4x)e^{2x}}{2}.$$

Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Pour l'étude du comportement de f quand x tend vers $-\infty$ on pourra poser $2x = -u$).

1. Dijon - Nancy-Metz - Reims - Strasbourg

3. Soit λ un réel négatif donné.

a. Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_{\lambda}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Etudier la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.

b. P, S et T étant les points de coordonnées respectives $(\lambda\ ;\ f(\lambda))$, $(\lambda\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ f(\lambda))$, calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du rectangle OTPS.

Déterminer λ pour que $\mathcal{A}(\lambda)$ soit maximum.

4. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $\varphi_{a,\,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{a,\,b}(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}.$$

a. Montrer que $\mathcal{F}$, muni de l'addition des applications et de la multiplication d'une application par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Montrer que le couple $\left(\varphi_{0,\,1},\ \varphi_{1,\,0}\right)$ est une base de $\mathcal{F}$.

Préciser les coordonnées de $\varphi_{a,\,b}$ dans cette base.

b. Soit d l'application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ qui a pour matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base ci-dessus.

Comparer $d\left(\varphi_{a,\,b}\right)$ et $\varphi'_{a,\,b}$ où $\varphi'_{a,\,b}$ est la fonction dérivée de $\varphi_{a,\,b}$.

c. Soit n un entier naturel non nul ; on se propose de calculer la matrice D^n, puissance n-ième de D.

On pose $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe deux suites réelles (α_n) et $\left(\beta_n\right)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad \mathrm{D}^n = \alpha_n\left(2\mathrm{I} + \beta_n\mathrm{J}\right).$$

Déterminer les suites (α_n) et $\left(\beta_n\right)$.

En déduire D^n, puis la dérivée d'ordre n de la fonction f étudiée dans la question 2.