Baccalauréat C Bordeaux juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

L'ensemble Ω est défini par :

$$\Omega = \{(1,1,1)\ ;\ (1,1,2)\ ;\ (1,2,1)\ ;\ (1,2,2)\ ;\ (2,1,1)\ ;\ (2,1,2)\ ;\ (2,2,1)\ ;\ (2,2,2)\}.$$

On désignera par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
L'application p de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}_+$ est définie sur les événements élémentaires par :

$$p(\{(x,y,z)) = a(x+y+z)+b, \quad \text{avec } (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2.\}$$

1. Montrer que p est une probabilité si

$$36a+8b=1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{12} \leqslant a \leqslant \frac{1}{12}.$$

2. $A = \{(x,y,z) \in \Omega \quad \text{tel que} x=1\}$
   $B = \{(x,y,z) \in \Omega \quad \text{tel que} x=2 \text{ et } y=2\}$.
   Trouver a et b pour que $p(A) = p(B)$.
3. Dans cette question $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$ satisfait les conditions du 1.
   On définit la variable aléatoire X par :
   pour tout élément (x,y,z) de Ω

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \mathrm{X}((x,y,z)) &=& 3 & \text{si} & x+y+z=3\\ \mathrm{X}((x,y,z)) &=& 4 & \text{si} & x+y+z=4\\ \mathrm{X}((x,y,z)) &=& -3 & \text{si} & x+y+z=5\\ \mathrm{X}((x,y,z)) &=& -4 & \text{si} & x+y+z=6.\end{array}\right.$$

   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Trouver a et b pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 0 ; calculer dans ce cas la variance de X. ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)\,\mathrm{d}x.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices deux lignes et deux colonnes à coefficients réels.
On rappelle que :

- L'ensemble M, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel, forme un espace vectoriel réel.
- L'ensemble M, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, forme un anneau commutatif pour lequel la matrice

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

  est élément neutre pour la multiplication.

On désigne par $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}$ constitué de toutes les matrices :

$$M_{a,\ b} = aI + bJ$$

où $J = \begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}$ et et b sont des nombres réels.

Étant donné un plan vectoriel euclidien E, rapporté à un base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on notera par Φ l'ensemble des endomorphismes $\varphi_{a,\ b}$ de E dont la matrice, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ est l'élément $M_{a,\ b}$ de $\mathscr{S}$.
On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes.

Partie A

1. **a.** Montrer que $\mathscr{S}$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel pour lequel $(I,\ J)$ est une base.

   b. L'ensemble $\mathscr{S}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices, forme un anneau commutatif pour lequel la matrice I est élément neutre pour la multiplication.

   c. Déduire de ce qui précède, la structure algébrique de l'ensemble Φ muni de l'addition des endomorphismes et de la multiplication par un réel.

   De même, déterminer la structure algébrique de l'ensemble Φ muni de l'addition et de la composition des endomorphismes.

2. **a.** Déterminer l'ensemble des couples $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\varphi_{a,\ b}$ est un automorphisme de E.

   b. Pour tout couple $(a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$ déterminer le noyau $\ker \varphi_{a,\ b}$ et l'image $\text{Im}\varphi_{a,\ b}$ de l'endomorphisme $\varphi_{a,\ b}$.

   c. Donner l'ensemble des projections vectorielles de E inclus dans Φ.

3. Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel euclidien E.

   Soit $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.

   On considère l'ensemble F des applications affines $f_{a,\ b}$ laissant le point O invariant et ayant $\varphi_{a,\ b}$ pour endomorphisme associé.

   a. Déterminer l'ensemble $\mathscr{J}$ des éléments de F qui sont des involutions affines. Caractériser avec précision, chaque élément de $\mathscr{J}$ et montrer que $\mathscr{J}$, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif.

   b. Soit Δ et Δ les droites affines passant par O et ayant, respectivement, pour vecteur directeur $\overrightarrow{e} = \sqrt{2}\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{e'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

   Montrer que $f_{0,\ 1}$ est la composée d'un élément de $\mathscr{J}$ et d'une homothétie ponctuelle que l'on déterminera.

   c. On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ de P de coordonnées x et y tels que $\left|x^2 - 2y^2\right| = 1$.

   Montrer que $\mathscr{H}$ est la réunion de deux coniques H_1 et H_1 dont on définira les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers, asymptotes).
   Montrer que H est invariant par chacun des éléments de $\mathscr{J}$.

Partie B

Dans cette partie, on désignera par Φ' le sous-ensemble des éléments $\varphi_{a,\ b}$ de Φ tels que

$$(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad \left|a^2 - 2b^2\right| = 1$$

1. **a.** Montrer que Φ', muni de la compositions des applications est un groupe commutatif.

   b. Montrer que si $\varphi_{a,\ b}$ est élément de Φ' il en est de même pour $\varphi_{a,\ -b}$, $\varphi_{-a,\ b}$ et $\varphi_{-a,\ -b}$.

   c. Vérifier que $\varphi_{1,\ 1}$ est élément de Φ'.

2. **a.** Montrer que si $\varphi_{a,\ b}$ est élément de Φ' avec $a > 0$ et $b > 0$ alors b 6 a < 2b.

   b. Montrer que si $\varphi_{a,\ b}$ est élément de Φ' il existe un élément $\varphi_{a_1,\ b_1}$ de Φ' tel que $\varphi_{a,\ b} = \varphi_{1,\ 1} \circ \varphi_{a_1,\ b_1}$.
   Déterminer a_1 et b_1 en fonction de a et de b et démontrer que $0 < a_1 < a$ et $0 < b_1 < b$ dès que $a \neq b$ et $a > 0$, $b > 0$.

   c. Déduire de ce qui précède que, pour tout élément $\varphi_{a,\ b}$ de Φ' avec $a > 0$ et $b > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$, $(n > 1)$ tel que $\varphi_{a,\ b} = \underbrace{\varphi_{1,\ 1} \circ \varphi_{1,\ 1} \circ \cdots \circ \varphi_{1,\ 1}}_{n \text{ fois}}$.

3. Soit A l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $(a\ ;\ b) \in \mathbb{Z}^2$ et $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$.
   Soit T l'application de Φ' dans A qui à l'élément $\varphi_{a,\ b}$ de Φ' associe le réel $T(\varphi_{a,\ b}) = a + b\sqrt{2}$.

   a. Montrer que A, muni de la multiplication des nombres réels, est un groupe commutatif isomorphe à Φ'.

   b. Démontrer que si $(a, b) \in (\mathbb{N} - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ est tel que $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$, il existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ pour lequel $a + b\sqrt{2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$.