Baccalauréat C Caen juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application f de P dans P qui, au point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z', telle que

$$z' = \overline{z} + 8\text{i}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application f.
2. Soit H le milieu du bipoint $(M,\ M')$. Montrer que la distance des points M et H est :

$$MH = \left|\dfrac{z - \overline{z} - 8\text{i}}{2}\right|.$$

3. Quelle est la nature de l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que 1

$$z - (3 + 2\text{i})| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\dfrac{z - \overline{z} - 8\text{i}}{2}\right|.$$

Construire (Γ) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On note n un entier naturel non nul, A l'entier naturel $3n + 1$ et B l'entier naturel $5n - 1$.

1. Démontrer que le P.G.C.D. de A et B est un diviseur de 8.
2. Pour quelles valeurs de n, ce P.G.C.D. est-il égal à 8 ? Calculer alors le P.P.C.M. de A et B.

PROBLÈME **12 POINTS**

À chaque couple de deux nombres réels $(a\ ;\ b)$ on associe la fonction numérique $f_{(a,\ b)}$ définie pour tout x réel par

$$f_{(a,\ b)}(x) = (ax + b)\text{e}^{2x}.$$

Partie A

1. Suivant les valeurs des réels a et b, étudier les variations de $f_{(a,\ b)}$ et les limites de $f_{(a,\ b)}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
   On appelle $\Gamma_{(a,\ b}$ la courbe représentative de $f_{(a,\ b)}$ dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 2 cm).
   Tracer $\Gamma_{(0,\ 1)}$, $\Gamma_{(1,\ 0)}$ et $\Gamma_{(-1,\ 0)}$.
2. Les deux nombres a et b décrivant chacun l'ensemble $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques $f_{(a,\ b)}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle que $\mathcal{F}$, muni de l'addition des applications et de la multiplication externe par un réel est un espace vectoriel). Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. Soit $I = f_{(1,\ 0)}$ et $J = f_{(0,\ 1)}$, démontrer que la famille $(I,\ J)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f_{(a,\ b)}$ soit monotone sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{M}$ des fonctions $f_{(a,\ b)}$ monotones sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$. Déterminer une base de $\mathscr{M}$.
4. Soit α un nombre réel et $\mathscr{H}_\alpha$ la droite vectorielle de $\mathscr{E}$ de base $(\alpha I + J)$.

   Démontrer que si α n'est pas nul, les courbes représentatives $\Gamma_{(a,\ b)}$ des fonctions $f_{(a,\ b)}$ de $\mathscr{H}_\alpha$ passent par un même point A dont on donnera les coordonnées par rapport au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, le réel α est supposé non nul.

1. On considère l'application $\Phi(\alpha)$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que

$$\Phi(\alpha)\left(f_{(a,\ b)}\right) = \frac{a}{\alpha} f_{(\alpha,\ 1)}.$$

   a. Calculer dans la base $(I,\ J)$ les coordonnées de l'image de $f_{(a,\ b)}$ par $\Phi(\alpha)$.

   b. Reconnaître la nature de $\Phi(\alpha)$ et en préciser les éléments géométriques.

2. Soit $\mathscr{H}'_\alpha$ la droite vectorielle de $\mathscr{E}$ de base $\alpha I - J$. Démontrer que $\mathscr{H}_\alpha$ et $\mathscr{H}'_\alpha$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{E}$.

   Soit alors ψ_α la symétrie vectorielle de $\mathscr{E}$ par rapport à $\mathscr{H}_\alpha$ et de direction $\mathscr{H}'_\alpha$.

   Déterminer la matrice de ψ_α dans la base $(I,\ J)$.

Partie C

1. Calculer en intégrant par parties

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} x\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} x^2\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x$$

2. Soit θ l'application de $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\theta\left[f_{(a,\ b)},\ f_{(a',\ b')}\right] = \int_0^{\frac{1}{4}} f_{(a,\ b)}(t) \times f_{(a',\ b')}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Démontrer que θ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$.

   Exprimer $\theta\left[f_{(a,\ b)},\ f_{(a',\ b')}\right]$ à l'aide des coordonnées de $f_{(a,\ b)}$ et $f_{(a',\ b')}$ dans la base $(I,\ J)$.

   Montrer que $(\mathscr{E},\ \theta)$ est un espace vectoriel euclidien.
3. Déterminer α pour que $\Phi(\alpha)$ soit une projection vectorielle orthogonale.
4. Déterminer α pour que $\psi(\alpha)$ soit une symétrie vectorielle orthogonale.