Baccalauréat C Caen septembre 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On considère, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) à l'inconnue $(x\ ;\ y)$:

$$(E) \qquad 6x - 10y = a.$$

où a désigne un entier relatif.

1. À quelle condition, portant sur a, l'équation (E) admet-elle des solutions ?
2. Résoudre l'équation dans la cas : $a = 22$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit (un)nEN la suite numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\ u_n & = & \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \forall n,\ n \in \mathbb{N}^{\star} \end{array}\right.$$

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f:\ x \longmapsto \text{Log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

   Déterminer la fonction dérivée de f.
   Calculer u_0.
2. Calculer u_1.
   Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.
3. Démontrer que :

$$\forall x,\ x \in [0\ ;\ 1], \quad 0 \leqslant \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n.$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 0.

PROBLÈME **12 POINTS**

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On notera P le plan vectoriel associé dont une base est $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & 3x + 5y \\ y' & = & -2x - 3y - 2. \end{array}\right.$$

1. **a.** Démontrer que f est une application affine et qu'elle admet un seul point invariant.
   b. Déterminer la matrice, dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de l'endomorphisme φ de P (application linéaire de P dans P) associé à f.

2. Quelle est la nature géométrique de l'application $f = f \circ f$? Caractériser $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.

3. Soit M un point quelconque de $\mathcal{P}$; on note :

$$M_1 = f(M) \quad ; \quad M_2 = f(M_1) \quad ; \quad M_3 = f(M_2).$$

Démontrer que l'isobarycentre (ou équibarycentre) du système des points $(M,\ M_1,\ M_2,\ M_3)$ est un point invariant par f.

Préciser ce point.

4. M étant toujours un point quelconque de $\mathcal{P}$, on considère la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M_0 & = & M \\ M_{n+1} & = & f(M_n)\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

On notera $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ les coordonnées de M_n.

Démontrer qu'il existe un couple $(p\ ;\ q)$, élément de $\mathbb{R}^2$, tel que

$$\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} + x_n = 2p \quad \text{et} \quad y_{n+2} + y_n = 2q.$$

Partie B

Soit $\mathcal{U}$, l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. $\mathcal{U}$ est muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel réel.

On désigne par S le sous-ensemble de $\mathcal{U}$, dont les éléments sont les suites s qui possèdent la propriété suivante :

pour toute suite s, de terme général s_n il existe un réel a tel que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$s_{n+2} + s_n = 2a.$$

1. **a.** Démontrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$.

b. Soit s un élément de S. Démontrer que :

$$\forall n,\ n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+4} = s_n.$$

En déduire s_n en fonction de $a, s_0,\ s_1$.

2. **a.** Démontrer que, étant donné un élément (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, il existe une suite s, et une seule, de S telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} s_0 & = & b \\ s_1 & = & c \\ s_{n+2} + s_n & = & 2a \quad \forall n,\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

On notera $s_{a,\,b,\,c}$ la suite ainsi obtenue.

b. Démontrer que l'application de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans S qui, au triplet $(a,\ b,\ c)$, associe $s_{a,\,b,\,c}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

c. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

3. Soit $u,\ v,\ w$ les suites de terme général respectif :

$$u_n = \cos n\frac{\pi}{2} \quad ; \quad v_n = \sin n\frac{\pi}{2} \quad ; \quad w_n = 1.$$

a. Démontrer que $u,\ v,\ w$ appartiennent à S et forment une base de S.

b. Déterminer, dans la base $(u,\ v,\ w)$, les coordonnées d'un élément s de S en fonction de $s_0,\ s_1,\ a$.

Partie C

Soit G l'ensemble des applications affines g de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telles que $g^4 = g \circ g \circ g \circ g$ soit l'application identique de $\mathcal{P}$.
On note ψ l'endomorphisme de P associé à g.

1. Soit M un point quelconque de P. On note :

$$M_1 = g(M) \quad ; \quad M_2 = g\left(M_1\right) \quad ; \quad M_3 = g\left(M_2\right).$$

Démontrer que le point Ω, isobarycentre du système $\left(M,\ M_1,\ M_2,\ M_3\right)$ est invariant par g.

2. Quelle propriété remarquable possède l'endomorphisme ψ^2 ? Quelle peut être la nature géométrique de ψ^2 ?

3. On suppose que ψ^2 est la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle D_1 de base $\left(\overrightarrow{e_1}\right)$, de direction la droite vectorielle D_2 de base $\left(\overrightarrow{e_2}\right)$.

a. Écrire la matrice de ψ^2 dans la base $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

b. Calculer le déterminant de cette matrice.

c. En déduire que ψ^2 ne peut être une telle symétrie vectorielle.

4. Démontrer que G est la réunion de deux ensembles disjoints G_1 et G_2 correspondant aux deux valeurs possibles de ψ^2 dont on déterminera parfaitement l'un et dont on montrera que l'autre est non vide et constitué d'éléments admettant un seul point invariant.