# ∾ Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1978 ∾

**EXERCICE 1** **4 POINTS**

Déterminer tous les couples $(a~;~b)$ d'entiers naturels dont le plus grand commun diviseur $d$ et le plus petit commun multiple $m$ vérifient la relation

$$8m = 105d + 30$$

**EXERCICE 2** **4 POINTS**

Soit $f$ une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. On suppose que

$$-f(x) \leqslant f'(x) \leqslant f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

On désigne par $g$ et $h$ les fonctions définies par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} f(x) \quad \text{et } h(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) \quad \text{pour tout nombre réel } x.$$

1. Montrer que $g$ et $h$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer leurs dérivées.
2. Montrer que $g$ est une fonction croissante et que $h$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, si $f(0)$ est nul, alors $f(x)$ est nul pour tout nombre réel $x$.

**PROBLÈME** **12 POINTS**

Pour tout nombre complexe $z$, on désigne par $\overline{z}$ le conjugué de $z$ ,et par $|z|$ le module de $z$.
On rappelle que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que $(1,~\mathrm{i})$ en est une base.
On désignera par $L$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$et par $E$ l'ensemble $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de tous les couples $(s~;~t)$ de nombres complexes.

1. Pour tout couple $(s~;~t)$ de E, on désignera par $f_{(s,~t)}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui au nombre complexe $z$ fait correspondre $s \cdot z + t \cdot \overline{z}$.
   **a.** Montrer que $f_{(s,~t)}$ appartient à $L$, pour tout couple $(s~;~t)$ de E.
   **b.** Réciproquement, si $g$ est un élément de $L$, montrer qu'il existe un couple unique $(s~;~t)$ de E pour lequel on a $g = f_{(s,~t)}$.
   Calculer $s$ et $t$ en fonction de $g(1)$ et $g(\mathrm{i})$. On dira alors que $(s~;~t)$ représente $g$.
   **c.** Pour $s,~t,~u$ et $v$ éléments de $\mathbb{C}$, l'application composée $f_{(u,~v)} \circ f_{(s~;~t)}$ appartient à $L$ . Il existe donc un couple unique $(p~;~q)$ qui la représente. Calculer $p$ et $q$ en fonction de $s,~t,~u$ et $v$.
   **d.** Déterminer tous les couples $(s~;~t)$ pour lesquels l'application $f_{(s,~t)}$ est involutive.
   **e.** Montrer que l'application $f_{(s,~t)}$ est bijective si et seulement si $|s| \neq |t|$.
   **f.** Lorsque l'application $f_{(s,~t)}$ est bijective, on sait que son application réciproque appartient à $L$. Il existe donc un couple unique $(x~;~y)$ qui représente cette application réciproque. Calculer $x$ et $y$ en fonction de $s$ et $t$.

**2.** Pour tout couple $(s\,;\ t)$ de E, on désignera par $V(s\,;\ t)$ l'ensemble des nombres *complexes* $\lambda$ pour lesquels il existe au moins un nombre complexe $z$ non nul tel que

$$s \cdot z + t \cdot \overline{z} = \lambda \cdot z.$$

**a.** Déterminer tous les couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels 0 appartient à $V(s\,;\ t)$.

**b.** Pour tout couple $(s\,;\ t)$, montrer que $\lambda$ appartient à $V(s\,;\ t)$ si et seulement si 0 appartient à $V(s-\lambda,\ t)$.

**c.** Afin d'étudier les ensembles $V(s\,;\ t)$, on se donne un plan affine euclidien P et un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ de ce plan. À tout nombre complexe $z = a + b\text{i}$ (où $a$ et $b$ sont réels) on fait correspondre le point-image $M$ dans P défini par $\overrightarrow{\text{O}M_z} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

À chacun des ensembles $V(s\,;\ t)$, on fait correspondre son image $C(s\,;\ t)$ dans P. Autrement dit, $C(s\,;\ t)$ est l'ensemble des points-images $M_\lambda$ pour $\lambda$ élément de $V(s\,;\ t)$.

Représenter sur une figure les ensembles $C(s\,;\ t)$ Correspondant à chacun des trois cas suivants :

1. $s = 1 + \text{i}$ et $t = \text{i}$
2. $s = 1 + 2\text{i}$ et $t = \text{i}$
3. $s = 1 + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et $t = \text{i}$

**d.** Pour un couple $(s\,;\ t)$ quelconque de E, quelle est la nature géométrique de l'ensemble $C(s\,;\ t)$ ?

**e.** Pour chaque couple $(s\,;\ t)$ de E, montrer qu'il y a au plus deux nombres *réels* dans l'ensemble $V(s\,;\ t)$.

**f.** Déterminer l'ensemble des couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels il n'y a qu'un seul nombre réel dans $V(s\,;\ t)$.

**g.** Déterminer l'ensemble des couples $(s\,;\ t)$ pour lesquels il y a deux nombres réels distincts dans $V(s\,;\ t)$.

**3.** Pour tout couple $(x\,;\ y)$ de E, on posera

$$x \star y = \frac{1}{2\text{i}}\left(\overline{x} \cdot y - x \cdot \overline{y}\right)$$

C'est un nombre réel qui est la partie imaginaire du produit $\overline{x} \cdot .y$.

Pour tout élément $g$ de $L$, on posera

$$\Delta(g) = g(1) \star g(\text{i})$$

**a.** Calculer $\Delta(f_{(s,\ t)}$ en fonction de $s$ et $t$.

**b.** Montrer que, pour tout couple $(x\,;\ y)$ de E et pour $g$ appartenant à $L$, on a

$$g(x) \star g(y) = \Delta(g) \cdot (x \star y).$$

(On pourra le montrer en mettant $g$ sous la forme $g = f_{(s,\ t)}$).

**c.** Montrer que, pour $g$ et $h$ éléments de $L$, on a

$$\delta(g \circ h) = \Delta(g) \cdot \Delta(h).$$

**d.** Pour $g$ élément de $L$, montrer que $g$ est injective si et seulement si $\Delta(g)$ est non nul.

**e.** Lorsque $V(s\ ;\ t)$ contient deux nombres réels distincts $\alpha$ et $\beta$, montrer qu'on a

$$\Delta\left(f_{(s,\ t)}\right) = \alpha \cdot \beta.$$

Que peut-on dire lorsque $V(s\ ;\ t)$ ne contient qu'un seul nombre réel $\gamma$ ?