Baccalauréat C Clermont-Ferrand [1] septembre 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Étudier les variations de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [-\pi\ ;\ +\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^4 x + 2\cos^3 X + 1 \end{array}$$

   Tracer la courbe représentative F de f dans un plan affine euclidien rapporté à un repère cartésien orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On prendra le centimètre comme unité de longueur.
2. Calculer $\cos^3 x$ en fonction de $\cos 3x$ et de $\cos x$.
   Calculer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$.
   En déduire l'aire de la partie du plan P limitée par F et par l'axe des abscisses, l'unité étant le centimètre carré.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans un plan affine euclidien P, on donne un rectangle ABCD dont les diagonales sont les segments [AC] et [BD].

1. Quel est le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $+1$, -1 et $+1$?
2. Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que $M\text{A}^2 - M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = \ell$, ℓ étant un réel donné ? Discuter.

PROBLÈME **12 POINTS**

1. Les fonctions réelles f et g sont définies par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \text{e}^{-t}\cos t \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \text{e}^{-t}\sin t \end{array}$$

   Etudier les ensembles de définition des fonctions dérivées premières de f et de g, puis calculer la dérivée première, pour la valeur t de la variable, de chacune des fonctions f et g.
   Calculer $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$.
2. Calculer, n désignant un entier naturel,

$$S(n) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,\text{d}t.$$

   Étudier la limite de $S(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   Étudier, lorsque l'entier naturel p tend vers $+\infty$, la limite de

$$\sum(p) = S(0) + S(1) + \cdots + S(p).$$

1. Grenoble

3. Dans un plan affine euclidien orienté Q, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, un point mobile $L(t)$ a pour coordonnées, lorsque le réel t désigne le temps,

$$x(t) = \text{e}^{-t}\cos t, \quad y(t) = \text{e}^{-t}\sin t.$$

Déterminer les coordonnées $V_x(t)$ et $V_y(t)$ du vecteur vitesse $V(t)$ et les coordonnées $\Gamma_x(t)$ et $\Gamma_y(t)$ du vecteur accélération $\Gamma(t)$ du point $L(t)$ à l'instant t.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}L(t)} \cdot \overrightarrow{\Gamma(t)}$.

Calculer une détermination de la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{V(t)}, \overrightarrow{\Gamma(t)}}\right)$.

4. On propose de calculer

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_x(t)\Gamma_x(t)\,\text{d}t$$

et pour cela on pose :

$$H = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-2t}\sin^2 t\,\text{d}t,\ I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-2t}\cos^2 t\,\text{d}t,\ J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{e}^{-2t}\sin t\cos t\,\text{d}t$$

Calculer $I + H$.

En effectuant, dans chacun des deux cas suivants, une intégration par parties, que l'on justifiera, calculer :

a. I en fonction de J,

b. J en fonction de I et de H.

En déduire les valeurs de I, J, H et F.

5. Les hypothèses et les notations étant celles de la question 3., on désigne par T l'ensemble des points $L(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

Trouver, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

a. l'équation de la tangente en $L(t)$ à T ;

b. les coordonnées du point $S(t)$ qui appartient à la tangente précédente et qui est tel que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{O}S(t)} \cdot \overrightarrow{\text{O}L(t)}$ soit nul ;

c. les coordonnées du point $N(t)$ qui est commun à la droite $(\text{O}S(t))$ et à la droite du plan Q qui est orthogonale en $L(t)$ à la droite $(L(t)Set))$.

6. Le plan Q étant rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on associe au point K, quelconque de Q, et dont les coordonnées sont x_k et y_k le nombre complexe

$$z_k = x_k + \text{i}y_k \quad \left(\text{i}^2 = -1\right).$$

Quelles sont les applications φ_1 et φ_2 de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, qui sont telles que, quel que soit le réel t,

a. $\varphi_1\left(Z_{L(t)}\right) = Z_{S(t)}$

b. $\varphi_2\left(Z_{N(t)}\right) = Z_{L(t)}$?

Caractériser les applications de Q sur Q qui sont représentées par φ_1 et φ_2