Pour relativiser les choses voici le corrigé du baccalauréat C proposé en juin 1978 dans les académies de la région parisienne. Ce sujet a provoqué un gros scandale : ceux qui auront le courage de se lancer dans ce corrigé apprécieront le niveau demandé aux malheureux candidats.
Denis Vergès

EXTRAIT DU BULLETIN VERT N° 316 Décembre 1978
EXAMENS ET CONCOURS
Le Baccalauréat C
À quoi joue-t-on ?

Il s'agit du sujet proposé en juin 1978. Au-delà de l'émotion soulevée par cette épreuve, dont la grande presse s'est fait l'écho, il convient maintenant de dégager objectivement les problèmes de fond mis en jeu. C'est pourquoi le bureau national de l'A. P. M. E. P. a décidé de faire, après une brève mise au point sur les évènements, une analyse du sujet en cause et des effets produits, ce qui fait l'objet de cet article. Nous ouvrirons ensuite, dans le prochain Bulletin, un débat plus général sur le fonctionnement du baccalauréat ; en effet, des abus ont été repérés dans d'autres séries et dans d'autres académies.

MISE AU POINT SUR LES ÉVÈNEMENTS

L'épreuve s'est déroulée un mercredi matin, et les correcteurs ont pu retirer leurs copies l'après-midi. Le lendemain matin, les membres de la commission d'harmonisation des notations décidaient de porter le barème à 28/20, ce qui prouvait déjà à l'évidence que le sujet était inadapté. Dès la fin de la semaine, la Régionale parisienne, alertée de la difficulté du sujet proposé, prit contact avec plusieurs correcteurs, lesquels confirmèrent cette inadéquation ; pour 5 correcteurs et 104 copies, les notes (sur 28) étaient les suivantes :

$n \leqslant 5$	59,6 %
$5 < n \leqslant 8$	22,1 %
$8 < n \leqslant 12$	11,5 %
$n > 12$	6,7 %

Ces ordres de grandeur ont été confirmés par la suite sur un lot de plus de 500 copies. S'appuyant sur ces résultats, et sur les analyses du texte effectuées par différents collègues, la régionale protestait par lettre auprès des recteurs intéressés, du doyen de l'inspection générale et du Service des examens ; elle demandait que soient prises au niveau académique des mesures d'urgence en vue de léser le moins possible les candidats, tout en soulignant que "ces mesures ne permettraient certainement pas de pallier toutes les conséquences d'un sujet mal adapté", et tout en se réservant d'analyser ultérieurement le problème sur le fond.

Corrigé du baccalauréat C Paris juin 1978

EXERCICE 1

1. Discussion de l'équation $a x = \dot{0}$.
Puisque 91 est le produit des deux nombres premiers 7 et 13 :
- si a est différent de $\dot{7}$ et de $\dot{13}$, l'équation admet pour seule solution $x = \dot{0}$;
- pour $a = \dot{7}$, l'équation $\dot{7}x = \dot{0}$ admet les solutions $x = \dot{0}$ et $x = \dot{13}$;
- pour $a = \dot{13}$, l'équation $\dot{13}x = \dot{0}$ admet les solutions $x = \dot{0}$ et $x = \dot{7}$.

2. Résolution de l'équation $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.
Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$(x + \dot{1})^2 - \dot{4} = \dot{0}.$$

Elle est équivalente aux deux équations suivantes :

$$x + \dot{1} = \dot{2} \quad \text{et} \quad x + \dot{1} = -\dot{2} = \dot{89},$$

ou

$$x = \dot{1} \quad \text{et} \quad x = \dot{88}.$$

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation proposée sont donc $\dot{1}$ et $\dot{88}$.

EXERCICE 2

1. Nature de la courbe (C_λ)

- Pour $\lambda = 0$, la courbe (C_0), dont l'équation est $y^2 = 0$, est formée par la droite double $x'Ox$.
- Pour $\lambda = 1$, la courbe (C_1), dont l'équation est $x^2 = 0$, est formée par la droite double $y'Oy$.
- Lorsque λ est différent de 0 et de 1, l'équation de (C_λ) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{x^2}{1-\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une conique de centre O, dont les axes sont $x'Ox$ et $y'Oy$.

— Pour $\lambda < 0$, (C_λ) est une hyperbole dont l'axe transverse est $x'Ox$. Ses éléments caractéristiques ont pour valeurs :

$$a = \sqrt{1-\lambda}, \quad b = \sqrt{-\lambda}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 - 2\lambda.$$

— Pour $0 < \lambda < 1$, (C_λ) est une ellipse, réduite à un cercle de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Son axe focal est $x'Ox$ pour $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$ et ses éléments caractéristiques sont alors

$$a = \sqrt{1-\lambda}, \quad b = \sqrt{\lambda}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 - 2\lambda;$$

son axe focal est l'axe $y'Oy$ pour $\dfrac{1}{2} < \lambda < 1$ et ses éléments caractéristiques sont cette fois

$$a = \sqrt{\lambda}, \quad b = \sqrt{1-\lambda}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\lambda - 1.$$

— Enfin pour $\lambda > 1$, (C_λ) est une hyperbole admettant $y'\mathrm{O}y$ pour axe transverse, ses éléments caractéristiques étant alors

$$a = \sqrt{\lambda}, \quad b = \sqrt{\lambda - 1}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\lambda - 1.$$

2. Courbes (C_λ)passant par un point donné, $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$

Les valeurs de λ correspondant aux courbes (C_λ) qui passent par le point M_0 sont les solutions, lorsqu'elles existent, de l'équation suivante :

(1) $\quad f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda\left(x_0^2 - y_0^2 - 1\right) + y_0^2 = 0.$

Le discriminant de cette équation a pour expression

$\Delta = \left(x_0^2 - y_0^2 - 1\right)^2 - 4y_0^2 = \left[x_0^2 - \left(y_0 + 1\right)^2\right]\left[x_0^2 - \left(y_0 - 1\right)^2\right]$, ou

$\Delta = \left(x_0 + y_0 + 1\right)\left(x_0 - y_0 - 1\right)\left(x_0 + y_0 - 1\right)\left(x_0 - y_0 + 1\right).$

Pour discuter l'existence des courbes (C_λ) passant par M_0 traçons sur le graphique les points A(1 ; 0), B(0 ; 1), C(−1 ; 0) et D(0 ; −1) ainsi que les droites (AB), (BC), (CD) et (DA) dont les équations respectives sont

$$x + y - 1 = 0, \qquad x + y + 1 = 0,$$
$$x - y + 1 = 0, \qquad x - y - 1 = 0.$$

Comme δ est positif lorsque M_0 est en O, on en déduit que

- si M_0 est situé dans l'une des régions hachurées, aucune courbe (C_λ) ne passe par ce point ;
- si M_0 est situé dans l'une des régions non hachurées, il passe deux courbes (C_λ) par ce point ;
- si M_0 est situé sur l'une des bornes de ces régions, il ne passe qu'une seule courbe (C_λ) par ce point, la valeur correspondante de λ étant

$$\lambda = \frac{S}{2} = \frac{y_0^2 - x_0^2 + 1}{2}.$$

Pour discuter la nature de ces coniques étudions la place des racines de l'équation (1) par rapport aux nombres 0 et 1. Pour cela considérons les expressions

$$f(0) = y_0^2, \quad f(1) = x_0^2, \quad U = \frac{S}{2} - 0 = \frac{y_0^2 - x_0^2 + 1}{2}$$

et

$$V = \frac{S}{2} - 1 = \frac{y_0^2 - x_0^2 - 1}{2}$$

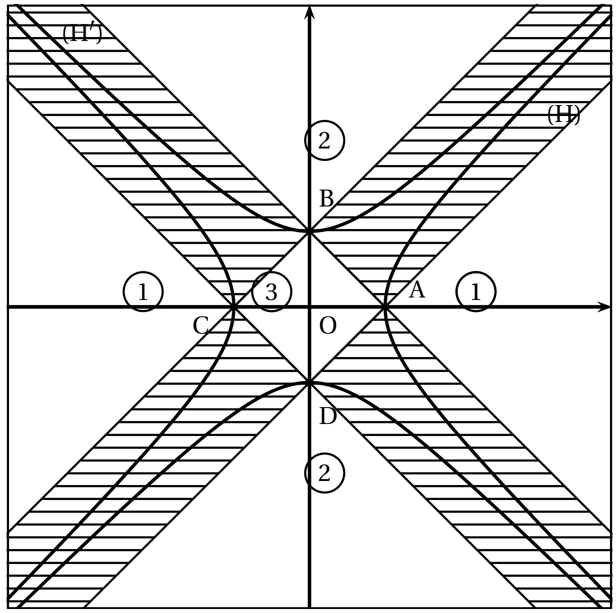
ce qui nous amène à tracer les hyperboles équilatères :

(H) ayant pour équation $y^2 - x^2 + 1 = 0$, dont les sommets sont A et C ;

(H′) ayant pour équation $y^2 - x^2 - 1 = 0$, dont les sommets sont B et D.

Nous désignerons par 1 les régions intérieures à (H) non hachurées, par 2 les régions intérieures à (H′) non hachurées et par 3 l'intérieur du carré ABCD.

Si le point M_0 est sur $x'\mathrm{O}x$ l'équation (1) a deux racines $\lambda' = 0$ et $\lambda'' = S = 1 - x_0^2$: donc si M_0 est confondu avec A ou C, seule (C_0) passe par ce point ; si M_0 est entre A et C, mais non en O, par ce point passent (C_0) et une ellipse ; si M_0 est en dehors du segment [AC], par ce point passent (C_0) et une hyperbole ; si M_0 enfin est en O, par ce point passent (C_0) et (C_1).



Si le point M_0 est sur $y'Oy$ l'équation (1) a deux racines $\lambda' = 1$ et $\lambda'' = S - 1 = y_0^2$. Les deux courbes passant par ce point sont, d'une part (C_1) d'autre part une hyperbole si M_0 est en dehors du segment [BD] ou une ellipse si M_0 est sur le segment [BD] ailleurs qu'en O.

Par B et D il ne passe que (C_1).

Pour tous les autres points M_0, les inégalités $f(0) > 0$ et $f(1) > 0$ montrent que les nombres 0 et 1 sont extérieurs à l'intervalle $\left[\lambda' ; \lambda''\right]$ limité par les racines de l'équation (1). Par conséquent,

- si M_0 est dans une des régions 1, sans être sur $x'Ox$, les inégalités $U < 0$ et $V < 0$ prouvent que l'on a $\lambda' < \lambda'' < 0 < 1$; par ce point passent donc deux hyperboles ;
- si M_0 est dans une des régions 2, sans être sur $y'Oy$, les inégalités $U > 0$ et $V > 0$ prouvent que l'on a $0 < 1 < \lambda' < \lambda''$; par ce point passent donc deux hyperboles ;
- si M_0 est dans la région 3, sans être sur les axes, les inégalités $U > 0$ et $V < 0$ prouvent que l'on a $0 < \lambda' < \lambda'' < 1$; donc par ce point passent deux ellipses.

Les deux coniques sont naturellement confondues lorsque M_0 est situé sur une des droites (AB), (BC), (CD) et (DA).

REMARQUE - Puisqu'un point d'une courbe (C_λ) ne peut être situé dans une région hachurée, on pouvait prévoir que, si M_0 est dans une région 1 ou 2, les courbes (C_λ) qui y passent ne peuvent entourer O, ce sont donc des hyperboles, et que, si M_0 est dans la région 3, les courbes (C_λ) qui y passent sont intérieures à cette région, ce sont donc des ellipses. Ceci nous amène à considérer que (C_0) se compose de l'ellipse aplatie [AC] et de l'hyperbole aplatie formée par les prolongements de [AC]. D'une manière analogue (C_1) se compose d'une ellipse aplatie, [BD], et d'une hyperbole aplatie, les prolongements de [BD].

PROBLÈME

Partie A

1. **a. Ensemble $\mathscr{D}_m$ des points où f_m est définie**

   Pour $m = 0$, la fonction f_0 s'écrit $f_0(x) = \dfrac{2x}{|x|}$. Elle n'est donc pas définie pour $x = 0$. Elle a pour valeur -2 ou $+2$ suivant que x est négatif ou positif.

   Pour $m \neq 0$, la fonction f_m, s'écrit

   $\varphi(x) = \dfrac{2(x-m)}{2m-x}$, pour $x < m$; $f_m(m) = 0$;

   $\psi_m(x) = \dfrac{2(x-m)}{x}$, pour $x > m$.

   Par conséquent nous avons

   $\mathscr{D}_m = \mathbb{R} - \{2m\ ;\ 0\}$, pour $m < 0$;

   $\mathscr{D}_m = \mathbb{R}*$, pour $m = 0$;

   $\mathscr{D}_m = \mathbb{R}$, pour $m > 0$.

   b. Ensemble $\mathscr{C}_m$ des points où f_m est continue

   Si l'on remarque que φ et ψ tendent vers zéro lorsque x tend vers m, on en déduit

   $\mathscr{C}_m = \mathscr{D}_m$;

   c. Ensemble $\mathscr{F}_m$ des points où f_m est dérivable

   La fonction f_0 est dérivable sauf au point $x = 0$. On a donc $\mathscr{F}_0 = \mathscr{D}_0$.

   Les expressions

   $$\frac{\varphi_m(m-h)}{-h} = \frac{2}{m+h} \quad \text{et} \quad \frac{\psi_m(m+h)}{h} = \frac{2}{m+h},$$

   dans lesquelles h est un réel positif, tendent toutes les deux vers une même limite, -2, lorsque h tend vers 0^+. La fonction f_m est donc dérivable lorsqu'elle est définie.

   On a donc, dans tous les cas, $\mathscr{F}_m = \mathscr{D}_m$.

2. **a. Asymptotes de la courbe (C_m)**

   L'existence des asymptotes de (C_0) ne se pose pas, puisque cette courbe se compose de deux demi-droites, $\left(C_0'\right)$ et $\left(C_0''\right)$, caractérisées respectivement par

   $$y = -2, \text{ avec } x < 0, \quad \text{et } y = +2, \text{ avec } x > 0.$$

   Pour $m \neq 0$, lorsque x tend vers $-\infty$, l'expression

   $$\varphi_m(x) = \frac{2(x-2m)+2m}{2m-2} = -2 + \frac{2m}{2m-x}$$

   tend vers -2, par valeurs inférieures si m est négatif, par valeurs supérieures si m est positif.

   Lorsque x tend vers $+\infty$, l'expression

   $$\psi_m(x) = 2 - \frac{2m}{x}$$

   tend vers $+2$, par valeurs supérieures si m est négatif, par valeurs inférieures si m est positif.

   Lorsque m diffère de zéro, la courbe (C_m) est donc asymptote à $\left(C_0'\right)$ et $\left(C_0''\right)$. En outre, lorsque m est négatif, elle est également asymptote aux droites ayant pour équations $x = 2m$ et $x = 0$.

   b. Centre de symétrie de la courbe (C_m)

   D'après ce qui précède, seul le point $I_m(m\ ;\ 0)$ peut être un centre de symétrie. Or, si l'on pose $x_1 = m - \lambda$ et $x_2 = m + \lambda$, avec $\lambda > 0$, on obtient

$$\varphi_m(x_1) = \frac{-2\lambda}{m+\lambda} \quad \text{et} \quad \psi_m(x_2) = \frac{2\lambda}{m+\lambda}$$

et, par suite, $\varphi_m(x_1) = -\psi_m(x_2)$.

Le point I_m est donc bien un centre de symétrie de (C_m) pour $m \neq 0$.

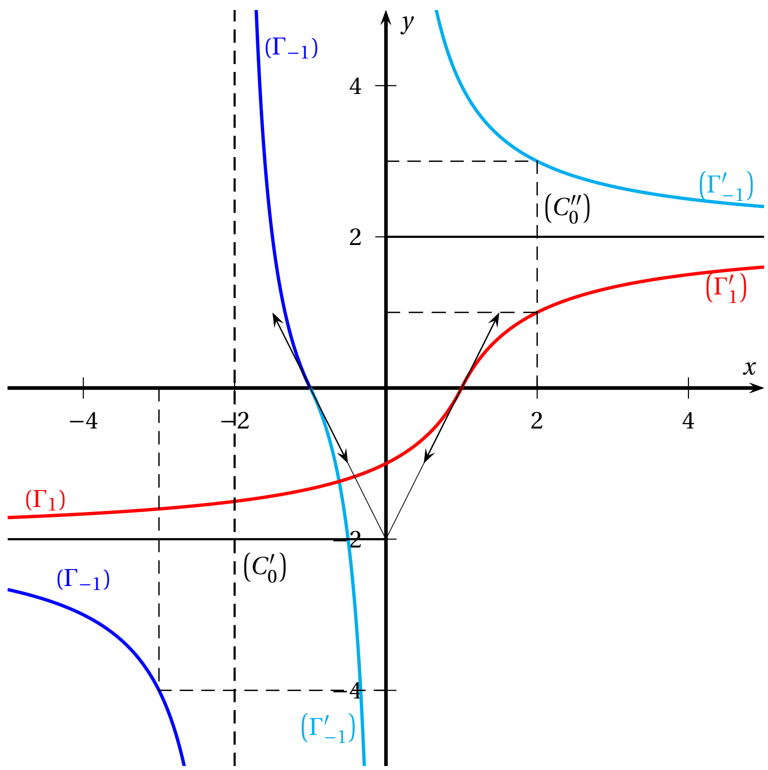
Pour $m = 0$, le point I_0 est également le centre de symétrie de $\left(C'_0\right) \cup \left(C''_0\right) = (C_0)$.

c. Courbes $(C_{-1}), (C_0), (C_1)$

La courbe (C_{-1}) est formée des deux branches de courbes définies de la manière suivante :

$(\Gamma_{-1}) : y = -\dfrac{2(x+1)}{2+x}$, avec $x \leqslant -1$;

$\left(\Gamma'_{-1}\right) : y = \dfrac{2(x+1)}{2+x}$, avec $x \geqslant -1$.



La courbe (C_1) est formée, d'une manière analogue, par les deux branches de courbes suivantes :

$(\Gamma_1) : y = \dfrac{2(x-1)}{2-x}$, avec $x \leqslant 1$;

$\left(\Gamma'_1\right) : y = \dfrac{2(x-1)}{x}$, avec $x \geqslant 1$;

Ces courbes, qui sont classiques, sont tracées sur la figure ainsi que (C_0).

Au point LI_{-1} la tangente à (C_{-1}) a pour pente -2.

Au point I_1 la tangente à (C_1) a pour pente $+2$.

La courbe (C_{-1}) est tracée en trait plein. La courbe (C_1) est tracée en trait interrompu.

3. a. Point commun aux courbes (C_m), avec $m > 0$

Lorsque m est strictement positif la branche $(\Gamma = m)$ de (C_m) définie par 2m

$$y = -2 + \frac{2m}{2m-x} \quad \text{et } x \leqslant m,$$

passe par le point J(0 ; −1), qui est donc commun aux courbes (C_m) correspondantes.

b. Correspondance entre (C_m) et (C_1) pour $m > 0$

S'il existe une affinité, α, transformant (C_1) en (C_m) celle-ci doit conserver le point J, les asymptotes et elle doit transformer I_1 en I_m. Ce ne peut donc être que l'affinité orthogonale, d'axe $y'\text{O}y$, qui a pour rapport $\dfrac{\overline{\text{O}I_m}}{\overline{\text{O}I_1}} = m$.

Or nous constatons que l'on a

$\varphi_m(mx) = \dfrac{2(x-1)}{2-x} = \varphi_1(x)$ et

$\psi_m(mx) = \dfrac{2(x-1)}{x} = \psi_1(x)$

ce qui suffit pour prouver l'existence de l'affinité α.

Correspondance entre (C_{-m}) et (C_{-1})

On peut remarquer de la même manière que l'on a

$\varphi_m(-mx) = \dfrac{2(-x-1)}{2+x} = \varphi_{-1}(x)$ et

$\psi_m(-mx) = \dfrac{2(-x-1)}{-x} = \psi_{-1}(x)$

On en conclut que, pour $m > 0$, la courbe (C_{-m}) se déduit de (C_{-1}) dans l'affinité orthogonale, β, d'axe $y'\text{O}y$ et de rapport positif $-m$.

Partie B

1. **a. Calcul de l'intégrale $\text{K} = \displaystyle\int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]\,\text{d}x$**

Puisque l'on suppose $0 < m \leqslant a$ l'expression $2 - f_m(x)$ est définie et continue sur l'intervalle $[0 ; a]$. On peut alors écrire

$$K = \int_0^a \left[2 - \varphi_m(x)\right]\,\text{d}x + \int_0^a \left[2 - \psi_m(x)\right]\,\text{d}x,$$

soit

$$K = \int_0^m \left(4 - \frac{2m}{2m-x}\right)\text{d}x + \int_m^a \frac{2m}{x}\,\text{d}x$$

$= [4x + 2m\ln(2m-x)]_0^m + 2m[\ln x]_m^a$

$= 4m + 2m\ln m - 2m\ln 2m + 2m\ln a - 2m\ln m$, ou

$K = 4m + 2m(\ln a - \ln 2m)$.

b. Limite de K lorsque m tend vers 0^+

On sait que $\displaystyle\lim_{m\to 0^+}(2m)\ln(2m) = 0$. On en déduit pour a fixé, $\displaystyle\lim_{m\to 0^+} K = 0$.

2. **a. Démonstration de la relation proposée**

D'après le théorème de la moyenne on peut écrire

$K_p = \displaystyle\int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p\,\text{d}x = \left[2 - f_m(x_1)\right]^p$,

avec $0 \leqslant x_1 \leqslant m$.

Or, lorsque x croît de 0 à m, $2 - f_m(x)$ décroît de 3 à 2. On en déduit $K_p \leqslant 3^p m$.

b. Calcul de l'intégrale $L_p = \displaystyle\int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p\,\text{d}x$

Cette intégrale s'écrit

$L_p = \displaystyle\int_m^a \left[2 - \psi_m(x)\right]^p\,\text{d}x = \int_m^a \left(\frac{2m}{x}\right)^p\,\text{d}x = (2m)^p\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_m^a$

ou $L_p = \dfrac{(2m)^p}{-p+1}\left(\dfrac{1}{a^{p-1}} - \dfrac{1}{m^{p-1}}\right) = \dfrac{(2m)^p}{(1-p)a^{p-1}} - \dfrac{2^p m}{1-p}$.

c. Calcul de la limite demandée

On peut écrire $\displaystyle\int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p \, \mathrm{d}x = K_p + L_p$.

Il est clair que L_p, tend vers zéro avec m. Par ailleurs la relation $K_p \leqslant 3^p m$ montre également que K_p tend aussi vers zéro. On en conclut $\displaystyle\lim_{m \to 0^+} \left[2 - f_m(x)\right]^p \, \mathrm{d}x = 0$.

3. a. Limite de $f_m(x)$, pour x donné, lorsque m tend vers 0^+

Quel que soit $x < 0$ on a $x < m$ et, par suite, $f_m(x) = \varphi_m(x)$. Dans ce cas, lorsque m tend vers 0^+, $f_m(x)$ a pour limite -2.

Pour $x = 0$ on a $f_m(0) = -1$. Donc $f_m(x)$ a pour limite -1.

Enfin, quel que soit x donné positif, puisque m tend vers zéro on peut prendre $m < x$. On a alors $f_m(x) = \psi_m(x)$ qui tend vers $+2$ lorsque m tend vers zéro.

On constate que l'on a une limite, $\lambda(x)$, pour chaque valeur de x. Cette limite est ainsi définie : $\lambda = f_0$ sur $\mathbb{R}*$ et $\lambda(0) = -1$.

b. Existe-t-il un réel $m > 0$ tel que l'on ait $2 - f_m(x) < \dfrac{1}{10}$ pour tout $x > 0$?

Évidemment non, puisque, pour m donné, lorsque x croît de 0 à $+\infty$, $2 - f(x)$ décroît d'une manière continue de 3 à 0.

c. Étude de la question c

La fonction $2 - f_m(x)$ décroît de 3 à 2 lorsque x croît de 0 à m, puis de 2 à 0 lorsque x croît de m à $+\infty$.

Par conséquent, si ϵ est supérieur ou égal à 2, en prenant $\alpha = 2$, quel que soit m compris entre 0 et α, pour tout x supérieur ou égal à ϵ, on aura $2 - f_m(x) < \epsilon$.

Supposons maintenant $\epsilon < 2$; dans ce cas l'expression $2 - f_m(x)$ ne peut être inférieure à ϵ que si l'on a

$$2 - f_m(x) = 2 - \psi_m(x) = \frac{2m}{x}.$$

Dans ces conditions nous avons $2 - f_m(\epsilon) = \dfrac{2m}{\epsilon}$

et, par suite, l'inégalité $\dfrac{2m}{\epsilon} < \epsilon$ sera satisfaite pour $m < \dfrac{\epsilon^2}{2}$. Donc l'expression décroissante $2 - f_m(x)$ sera inférieure à ϵ pour $x > \epsilon$.

En définitive, en prenant $\alpha = \dfrac{\epsilon^2}{2}$ quel que soit m tel que $0 < m < \alpha$, et quel que soit $x \geqslant \epsilon$, nous aurons $2 - f_m(x) < \epsilon$.

d. Nouvelle démonstration du paragraphe B 2. c.

Le nombre positif a étant donné, soit ϵ un réel positif inférieur à a.

Nous pouvons écrire :

$$A = \int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p \, \mathrm{d}x = \int_0^\epsilon \left[2 - f_m(x)\right]^p \, \mathrm{d}x + \int_\epsilon^a \left[2 - f_m(x)\right]^p \, \mathrm{d}x,$$

ou, en utilisant la formule de la moyenne

$$A = \epsilon\left[2 - f_m(x_1)\right]^p + (a - \epsilon)\left[2 - f_m(x_2)\right]^p,$$

avec $0 < x_1 < \epsilon$ et $\epsilon < x_2 < a$.

Prenons alors $m < \dfrac{\epsilon^2}{2}$ et faisons tendre ϵ vers zéro. Le nombre $\left[2 - f_m(x_1)\right]^p$ restant limité, $\epsilon\left[2 - f_m(x_1)\right]^p$ tend vers zéro. Par ailleurs, d'après le paragraphe précédent, on a

$$(a-\epsilon)\left[2-f_m\left(x_2\right)\right]^p < (a-\epsilon)\epsilon^p$$

et, par suite,

$$\lim_{\epsilon \to 0}(a-\epsilon)\left[2-f_m\left(x_2\right)\right] = 0.$$

On retrouve bien le résultat du paragraphe B, 20, c :

$$\lim_{m \to 0^+} A = 0.$$