

☞ Baccalauréat C Dijon juin 1978 ☞

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(x) = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{2t \operatorname{Log} t}{(1+t^2)^2} dt$$

où $\operatorname{Log} t$ représente le logarithme népérien du nombre réel t . (On remarquera que, pour tout nombre réel t non nul,

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

2. Soit I la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$I: x \mapsto I(x), \quad \text{pour } x \text{ strictement positif.}$$

Cette fonction admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division par 7 de 2^n , puis de 10^{2^n} .
Vérifier que le nombre qui s'écrit 787 878 en base dix est divisible par 7.
2. Soit b et c deux entiers naturels qui satisfont aux conditions suivantes :

$$0 < b \leq 9 \quad \text{et} \quad 0 \leq c \leq 9$$

Pour chaque entier naturel non nul n , on considère le nombre $a(n)$ qui s'écrit $\overline{bcbcb \dots bc}$ en base dix, b et c étant répétés chacun n fois.

Déterminer, suivant les valeurs des entiers b et c , l'ensemble des entiers n tels que $a(n)$ soit divisible par 7.

PROBLÈME

13 POINTS

Les parties A et B sont indépendantes, A étant un exemple illustrant B.

Partie A

On rappelle que l'ensemble \mathcal{F} des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur \mathbb{R} , muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On note f_1 et f_2 les éléments de \mathcal{F} définis respectivement par

$$f_1(x) = (1+x)e^x, \quad f_2(x) = (1-x)e^x$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathcal{F} engendré par la partie $(f_1; f_2)$?

1. Vérifier que $(f_1; f_2)$ est une base de E .

2. Soit f un élément de E . Démontrer que sa fonction dérivée f' est élément de E . Soit φ l'application de E dans E qui, à tout élément de E , associe sa fonction dérivée première.
Établir que φ est une application linéaire de E dans lui-même (ou endomorphisme de E).
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs de E invariants par φ est une droite vectorielle D dont on donnera une base.
4. Démontrer que, pour tout élément f de E , $\varphi(f) - f$ est élément de D .

Partie B

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et D une droite vectorielle donnée de E . On considère l'ensemble \mathcal{G} des endomorphismes g de E qui possèdent les deux propriétés suivantes :

$$(1) \quad (\forall \vec{u} \in D) \quad (g(\vec{u}) - \vec{u} = \vec{0})$$

$$(2) \quad (\forall \vec{u} \in E) \quad (g(\vec{u}) - \vec{u} \in D)$$

1. Prouver que le noyau de tout élément g de \mathcal{G} est inclus dans D . En déduire que tout élément de \mathcal{G} est bijectif.
2. Soit \vec{j} un vecteur donné de D , non nul.

a. Soit g un élément donné de \mathcal{G} .

Démontrer que pour tout vecteur \vec{u} de E , on peut trouver un nombre réel x et un seul tel que

$$g(\vec{u}) = \vec{u} + x\vec{j}.$$

On définit ainsi l'application θ de E dans \mathbb{R} par

$$\theta : \vec{u} \mapsto \theta(\vec{u}) = x.$$

Démontrer que θ est une application linéaire ; en déterminer le noyau.

b. Inversement, soit θ une application linéaire de E dans \mathbb{R} , de noyau D ou E . Soit g l'application de E dans E définie par

$$g(\vec{u}) = \vec{u} + \theta(\vec{u})\vec{j}.$$

g est-elle élément de \mathcal{G} ?

3. Prouver qu'il existe au moins une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{G} soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, b étant un nombre réel.
Soit \mathcal{B} une telle base.
4. Démontrer que (\mathcal{G}, \circ) est un sous-groupe du groupe des endomorphismes bijectifs de E , \circ désignant la loi de composition des applications.
5. Pour tout réel m , on note Δ_m la droite vectorielle dont une équation dans la base \mathcal{B} est $y - mx = 0$ et s_m la symétrie par rapport à Δ_m , de direction D .
Soit m un réel donné ; démontrer que, quel que soit l'élément g de \mathcal{G} , on peut trouver un réel m' tel que

$$g = s_{m'} \circ s_m.$$