Baccalauréat C La Réunion septembre 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Déterminer deux entiers naturels a et b tels que leur plus petit commun multiple soit 120 et la somme de leurs carrés 801.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on donne un cercle (C), centré en un point O, dont un diamètre est appelé $[AA']$.
Autres données :

(D) tangente en A' à (C),

P un point de (C), distinct de A et A',

(Δ) médiatrice de (A, P),

s la symétrie orthogonale d'axe (Δ),

Q le point d'intersection de la droite (D) avec la tangente en P à (C),

t la translation de vecteur directeur $\overrightarrow{OQ}$,

M l'image de A dans la translation t : $M = t(A)$,

1. Démontrer que les points A, P, M sont alignés.
2. Démontrer qu'il existe deux isométries vectorielles du plan vectoriel π, associé à $\mathcal{P}$, qui transforment $\overrightarrow{QM}$ en $\overrightarrow{OP}$.
   En préciser la nature et les éléments,
3. Déterminer la nature et les éléments de l'application ponctuelle φ telle que $t = \varphi \circ s$.
4. Démontrer qu'il existe deux isométries affines, dont on précisera les éléments, qui transforment le bipoint (Q, M) en le bipoint (O, P).
   L'une d'elles est une rotation dont le centre sera appelé I.
5. Montrer que le point I appartient à une parabole indépendante de la position du point P sur le cercle (C).

PROBLÈME **12 POINTS**

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels, E l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
E étant muni d'une addition notée +, telle que pour tout couple $(f,\ g)$, élément de E^2 , et pour tout x réel,

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),$$

et d'une multiplication par un réel notée $\cdot$ telle que pour tout f, élément de E, pour tout k réel, pour tout x réel,

$$(k\cdot f)(x) = kf(x),$$

On admettra que (E , +, $\cdot$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
À toute application f, élément de E, on associe la fonction F telle que, pour tout x réel,

$$F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

L'objet de ce problème est de proposer l'étude de

– quelques propriétés des fonctions F,
– quelques propriétés de l'application T qui, à f, associe F,
– quelques fonctions F particulières,

N. B. Les parties B, C et D de ce problème sont totalement indépendantes les unes des autres. Le candidat les traitera dans l'ordre de son choix, Toute réponse non correctement justifiée sera considérée comme nulle.

Partie A

1. On désigne par $\mathscr{F}$ la fonction telle que, pour tout X réel,

$$\mathscr{F}(X) = \int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\mathscr{F}$ appartient à E et possède une dérivée *continue* sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $v_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto X$ tel que $X = x + a$, où a est un réel donné. Démontrer que la fonction composée,

$$\mathscr{F} \circ v_a : \mathbb{R} \to \quad x \longmapsto (\mathscr{F} \circ v_a)(x) = \int_0^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}dt,$$

appartient à E et possède une dérivée *continue*, telle que pour tout x réel,

$$(\mathscr{F} \circ v_a)'(x) = f(x+a).$$

3. En déduire que F, définie ci-dessus par (1), appartient à E et possède une dérivée *continue*, telle que, pour tout x réel,

$$F(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]$$

Partie B

1. Vérifier que l'application T est un endomorphisme de E. Dans la suite, on utilisera la notation $F = T(f)$.

2. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto |x-1|$. G appartient-elle à E ? G est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Existe-t-il g, élément de E, telle que $T(g) = G$? L'application T est-elle surjective ?

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \pi x$. Déterminer $H = T(h)$. L'application T est-elle injective ?

4. On appelle E_3 le sous-espace vectoriel de E, ensemble des fonctions polynômes de degré *deux au plus*. Montrer que E_3 est stable par T. On note $\hat{f}$ l'application de E_3 dans E_3 définie par :

$$\hat{T} : f \longmapsto T(f).$$

T est-elle bijective ?

Partie C

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \longmapsto |t|$.
φ appartient-elle à E ?

1. Démontrer que $\Phi = T(\varphi)$ est donnée par les formules :

$$\Phi(x) = |x| \text{ pour } |x| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) \text{ pour } |x| \leqslant 1.$$

En les rapportant à un même repère, représenter graphiquement φ et Φ.

2. Démontrer que, pour tout x réel, $|x| \leqslant \Phi(x)$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant \Phi(x)$, ainsi que, pour tout x réel tel que $|x| \leqslant 1$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$.
3. En distinguant les deux cas :

$$|u+v| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |u+v| \leqslant 1,$$

démontrer que quels que soient u et v réels,

$$\Phi(u)+\Phi(v) \geqslant \Phi(u+v).$$

Partie D

1. Soit $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \dfrac{2}{1+|t|}$.
   ω appartient-elle à E ?
2. Dessiner la courbe représentative de ω, rapportée à un repère orthonormé.
3. Démontrer que $\Omega = T(\omega)$ est donnée par les formules :

$$\Omega(x) = \text{Log}\left(4-x^2\right) \quad \text{pour } |x| \leqslant 1$$

et

$$\Omega(x) = \text{Log}\left(1+\frac{2}{|x|}\right) \quad \text{pour } |x| \geqslant 1.$$