Baccalauréat C Lille juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On désigne par $\dot{a}$ la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a.

1. Déterminer les couples $\left(\dot{a},\ \dot{b}\right)$ tels que :

$$\dot{a}.\dot{b} = \dot{0}, \quad \dot{a} \neq \dot{0} \text{ et } \dot{b} \neq \dot{0}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l c l} \dot{3}x + \dot{3}y & = & \dot{3}\\ \dot{2}x + y & = & \dot{5}\end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien réel orienté de dimension 3, et $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe de E. Pour tout réel θ, on appelle φ_θ l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & x\cos^2\theta - y\sin\theta - z\sin\theta\cos\theta\\ y' & = & x\sin\theta\cos\theta + y\cos\theta - z\sin^2\theta\\ z' & = & x\sin\theta + z\cos\theta\end{array}\right.$$

1. Démontrer que φ_θ est une transformation orthogonale (ou isométrie vectorielle).
2. On suppose dans cette question $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; montrer que φ_θ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'axe.

PROBLÈME **13 POINTS**

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On note $\overline{z}$ le complexe conjugué de z.

On considère le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Au point M de coordonnées $(x~;y)$ on fait correspondre le complexe $z = x+\text{i}y$ appelé affixe de M.

Partie A

1. Soit $F_{a,\ b}$ l'application de P vers P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' dont l'affixe z' est définie par $z' = a\overline{z} + \text{i}b$, $(a~;~b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.
   Établir les formules qui expriment les coordonnées $\left(x'~;~y'\right)$ de M' en fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M.
   a. Suivant les valeurs de a et b, rechercher les points invariants de $F_{a,\ b}$.
   b. Si $|a| \neq 1$, établir que $F_{a,\ b}$ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{b}{a+1}$ par une homothétie dont on cherchera le centre et le rapport.

2. Soit $G_{c,\,d}$ l'application de P vers P qui au point N d'affixe z fait correspondre le point N' dont l'affixe z' est définie par $z' = cz + \mathrm{i}d$, $(c\ ;\ d) \in \mathbb{R}^{\star} \times \mathbb{R}$.
Déterminer, suivant les valeurs de c et d, la nature de $G_{c,\,d}$.

Partie B

1. Dans cette question on considère $|a| \neq 1$ et le point M_1 d'affixe $u = a + \mathrm{i}b$.
On pose $M_2 = F_{a,\,b}(M_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif

$$M_{n+1} = F_{a,\,b}(M_n)$$

a. Montrer que M_n a pour affixe $u_n = a^n + \mathrm{i}b\dfrac{1-(-a)^n}{1+a}$.

b. Montrer que les points M_n, $n \in \mathbb{N}^{\star}$, appartiennent à la réunion de deux droites dont l'une D_1 passe par $\mathrm{A}\left(0\ ;\ \dfrac{b}{1+a}\right)$ et M_1 alors que l'autre D_2 est la transformée de D_1 par $F_{a,\,b}$.

2. Dans cette question, on considère $c \neq 1$ et le point N_1 d'affixe $v_1 = c + \mathrm{i}d$. On pose $N_2 = G_{c,\,d}(N_1)$ et plus généralement pour n entier strictement positif, $N_{n+1} = G_{c,\,d}(N_n)$.

a. Montrer que N_n a pour affixe :

$$v_n = c^n + \mathrm{i}d \times \frac{c^n - 1}{c-1}.$$

b. Montrer que les points N_n, $n \in \mathbb{N}^{\star}$, appartiennent à une droite Δ passant par $\mathrm{B}\left(0\ ;\ \dfrac{d}{1-c}\right)$ et N_1.

3. On considère les cas particuliers $c = -a$ et $d = b$ avec $|a| \neq 1$.
Montrer que $\Delta = D_2$.

Partie C

Soit Φ_1 la fonction numérique définie par 1

$$\Phi_1(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 2.$$

1. Étudier les variations de $\Phi_1(x)$ et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C}_1)$ dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ en précisant le comportement de la courbe aux bornes des intervalles de définition. En particulier, montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_1)$.

2. On considère $c = 2, d = 1$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, on note Φ_{n+1} la fonction numérique dont la courbe représentative $(\mathscr{C}_{n+1})$ est l'image de la courbe $(\mathscr{C}_n)$ par $G_{(2,\,1)}$, $(\mathscr{C}_n)$ représentant la fonction Φ_n.
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star},\quad \Phi_n(x) = x\mathrm{e}^{\frac{2^{n-1}}{x}} - 2^{n-1} - 1.$$

3. **a.** Montrer que pour tout n entier strictement positif, les courbes $(\mathscr{C}_n)$ ont les mêmes asymptotes.

b. Soit S_n le point de $(\mathscr{C}_n)$ en lequel la tangente a la direction définie par $\vec{\imath}$, montrer que l'ensemble de ces points, lorsque n décrit $\mathbb{N}^{\star}$,est inclus dans une droite passant par $\mathrm{B}(0\ ;\ -1)$.

Partie D

Soit h_1 la fonction numérique définie par :

$$h_1(x) = x - 1 + \frac{\text{e} - 2}{x}.$$

1. Construire dans le plan P la courbe H_1 représentative de la fonction h_1. On placera le point de coordonnées $(1\,;\ h_1(1))$. On prendra 0,85 pour valeur approchée de $\sqrt{\text{e} - 2}$.

2. On considère la fonction numérique h_n définie par

$$h_n(x) = x - 1 + (4)^{n-1}\frac{\text{e} - 2}{x}, \quad n \in \mathbb{N}^\star.$$

Soit H_n la courbe représentative de h_n.

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad H_{n+1}$ est l'image de H_n par $G_{(2,1)}$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}_n$ du sous-ensemble de P délimité par les courbes d'équation :

$$y = h_n(x), \quad y = x - 1, \quad x = 2^{n-1}, \quad x = 2^n.$$

Quel que soit n, $n \in \mathbb{N}^\star$, établir une relation entre $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{A}_{n-1}$.