Baccalauréat C Lille septembre 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$R, définie par :

$$f(x) = -x^3 + x^3 \text{Log}\, x.$$

1. Étudier la fonction f et construire la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de cette fonction dans un repère orthonormé.
2. Soit $a \in]0\,;\, \text{e}[$. En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre $x'\text{O}x$, $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = \text{e}$.
   Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers zéro ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On définit la suite réelle (u_n) par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$$

où p appartient à $\mathbb{R}_+ - \{0,\ 1,\ 2\}$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{+1n+1} - u_n$; montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n, a.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$; montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n puis en fonction de p, n, a.
4. On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \text{e}^a \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}.$$

   Justifier la définition en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, Log $(v_n) = u_n$. En déduire v_n en fonction de p, n, a et déterminer, suivant les valeurs de p et a, la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On considère un espace vectoriel E de dimension 3, rapporté à une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit l'endomorphisme f_t défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_t\left(\vec{\imath}\right) & = & \dfrac{t+1}{2}\vec{\imath} + \dfrac{t-1}{2}\vec{\jmath} \\ f_t\left(\vec{\jmath}\right) & = & \dfrac{t-1}{2}\vec{\imath} + \dfrac{t+1}{2}\vec{\jmath} \\ f_t\left(\vec{k}\right) & = & \dfrac{1-t}{2}\vec{\imath} + \dfrac{1-t}{2}\vec{\jmath} + \vec{k} \end{array}\right.$$

1. Donner l'expression analytique de f_t dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

2. On se propose de chercher les valeurs de ℓ pour lesquelles il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul tel que $f_t\left(\overrightarrow{u}\right) = \ell\overrightarrow{u}$.

   On supposera que t est différent de 1. On trouve deux valeurs de ℓ ; pour l'une l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ correspondants est un plan dont on déterminera une base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$, pour l'autre l'ensemble est une droite dont on déterminera une base $(\overrightarrow{K})$.

   Montrer que $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ est une base de E. Pour quelles valeurs de , tf_t est-il bijectif ?

   Trouver l'expression analytique de f_t dans la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$; en déduire que, pour tout t non nul, l'ensemble des f_t est, muni de la loi de composition des applications, un groupe commutatif isomorphe à $\left(\mathbb{R}^{\star}, \times\right)$.

Partie B

On donne dans un espace affine E associé à l'espace vectoriel $\overrightarrow{\text{E}}$ l'application affine F_t qui laisse un point O invariant et dont l'endomorphisme associé est f_t.

1. **a.** Donner les expressions analytiques de F_t dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, puis dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$. On appellera M' l'image de M par F_t.

   b. Quel est l'ensemble des points invariants par F_t ? Quand M n'est pas invariant, que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$? Prouver que la droite (MM') coupe l'ensemble des points invariants en un point m. Comparer $\overrightarrow{mM}$ et $\overrightarrow{mM'}$.
2. On suppose t non nul.

   a. On considère g_t restriction de f_t au plan vectoriel $\overrightarrow{\text{P}}$ engendré par $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{K}$. Pourquoi g_t est-il un endomorphisme de $\overrightarrow{\text{P}}$? Donner son expression analytique dans la base $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{K}\right)$. Soit G_t l'application affine du plan de repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{K}\right)$, qui admet g_t comme endomorphisme associé et qui transforme O en A de coordonnées a et b.

   Vérifier que G_t a comme expression analytique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X' & = & X + a \\ Z' & = & tZ + b \end{array}\right.$$

   Quel est suivant les valeurs de t, a, b l'ensemble des points invariants ?
3. On suppose de plus t différent de 1 et on pose $a = 0$ et $b = 1$.

   Donner une équation cartésienne de l'image (D$'$) de la droite (D) d'équation $uX + vZ + w = 0$ par G_t.

   Trouver les droites parallèles à leur image.

   Si (D) et (D$'$) ne sont pas parallèles, montrer que les deux droites se coupent sur l'ensemble des points invariants par G_t. Construire le point A.

   Déduire des résultats précédents une construction, au moyen de la règle, de l'image d'un point non situé sur (OA) connaissant A et l'ensemble des points invariants par G_t.

Partie C

On donne dans un espace affine E de dimension 3, quatre points A, B, C, D formant un repère affine (c'est-à-dire non coplanaires).
Soit F une application affine laissant A, B, C invariants. Soit D$'$ l'image de D.

1. Montrer que tout point du plan (ABC) est invariant par F.

2. On suppose que $\mathrm{D}' = \mathrm{D}$. Montrer que F est l'identité sur E. On suppose dans la suite que D et D' sont distincts.
3. D' est un point du plan (ABC). Montrer que F est une projection que l'on caractérisera.
4. On suppose que la droite (DD') coupe le plan (ABC) en d.
   Montrer que F est une application du même type que celle étudiée au B 1.