

œ Baccalauréat C Limoges juin 1978 œ

EXERCICE 1

4 POINTS

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires, chaque boule ayant même probabilité d'être tirée.

On tire successivement 3 boules en remettant la boule après tirage si celle-ci est noire et en ne remettant pas la boule après tirage si celle-ci est blanche.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 3 boules associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

EXERCICE 2

4 POINTS

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère l'application f de P dans P qui au point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z où :

$$Z = \left(2 + \frac{3}{2}i\right)z - \frac{5}{2}i\bar{z},$$

\bar{z} désignant le nombre complexe conjugué de z .

1. Calculer les coordonnées $(X; Y)$ de M en fonction des coordonnées $(x; y)$ de m .
Quel est l'ensemble des points M ?
2. Calculer le module de Z en fonction de x et y .
Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que $|Z| = \sqrt{5}$.
3. Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que O, m et M soient alignés.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox, y'Oy$.

Partie A

Soit la fonction numérique f_1 de la variable réelle x définie par

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)}.$$

Étudier les variations de f_1 et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}_1) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On montrera que la courbe (\mathcal{C}_1) admet un axe de symétrie et on précisera les tangentes à (\mathcal{C}_1) aux points d'abscisses 0 et 6.

Partie B

On considère l'ensemble des fonctions numériques g_m de variable réelle x définies par

$$g_m(x) = \text{Log} \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6m)}$$

avec m réel strictement positif. On notera (Γ_m) la courbe représentative de g_m dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Montrer que (Γ_1) courbe représentative de g_1 :

$$g_1(x) = \text{Log} \sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)}.$$

admet un axe de symétrie.

Etudier les variations de g_1 et construire (Γ_1) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) après avoir étudié les branches infinies.

- b. Calculer $I \int_a^b g_1(x) dx$ (a et b étant deux réels strictement supérieurs à 6).

En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe $x'Ox$, (Γ_1) et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = 9$. (x_0 étant l'abscisse positive de l'un des points d'intersection de (Γ_1) avec $x'Ox$).

2. On considère dans P l'application T_m qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point $T_m(M)$ de coordonnées $(x' = mx; y' = y + \text{Log } m)$, (m étant le réel strictement positif choisi précédemment).
- a. Montrer que T_m est une application affine. Est-elle bijective? Peut-elle être une isométrie?
- b. Montrer que $T_m(\Gamma_1) = (\Gamma_m)$.
- c. Déterminer la structure de l'ensemble F des applications T_m muni de la loi de composition des applications.
- d. Montrer qu'il existe une application appartenant à l'ensemble F par laquelle deux courbes quelconques (Γ_α) et (Γ_β) se déduisent l'une de l'autre.

Partie C

1. Soit la fonction numérique f_2 de la variable réelle x définie par

$$f_2(x) = -f_1(x).$$

Construire la courbe représentative (\mathcal{C}_2) de f_2 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du A. Montrer que la courbe (H) définie par $(H) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$ a pour équation

$$x^2 - 6x - 3y^2 = 0.$$

En déduire la nature, le centre et les coordonnées des foyers de (H) .

2. On considère dans P la transformation S qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point $S(M) = M'$ de coordonnées

$$x' = -\sqrt{3}x + y; \quad y' = -x - \sqrt{3}y.$$

À tout point M de P on fait correspondre le nombre complexe $Z = x + iy$ affixe de M .

- a. Exprimer Z' affixe de M' en fonction de Z . Déterminer S et ses éléments caractéristiques.
- b. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe $(H') = S(H)$.
- c. On considère le point $M_0(1; 0)$ et la suite des points

$$M_1 = S(M_0), \quad \dots, \quad M_n = S(M_{n-1}).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad M_n = (\mathcal{H}_n \circ R^n)(M_0)$.

\mathcal{H} étant une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport, R étant une rotation de centre O dont on déterminera l'angle.

En déduire que M_n est transformé de M_0 par une similitude que l'on caractérisera.

En déduire les coordonnées de M_n en fonction de n .