∽ Baccalauréat C Limoges ∾
septembre 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3} \end{array}$

1. Sachant que 2 et 3 sont premiers entre eux :
   a. Prouver que $A = \{x \in \mathbb{Z} / f(x) \in \mathbb{Z}\}$ est non vide.
   b. Déterminer A.
2. Déterminer $B = \{x \in A / x^2 + f^2(x) \in 5\mathbb{Z}\}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

L'espace vectoriel E de dimension 3 est muni d'une base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\left\{\begin{array}{l} f\left(\vec{\imath}\right) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \\ f\left(\vec{\jmath}\right) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ f\left(\vec{k}\right) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \end{array}\right.$$

1. Déterminer le noyau N de f et en donner une base.
   Déterminer l'image E$'$ de f et démontrer que $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en est une base.
2. Soit g la restriction de f à l'image E$'$. Donner la matrice A de g sur la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; montrer que g est bijective et déterminer l'application réciproque g^{-1}.
3. Déterminer l'unique endomorphisme hde E ayant les propriétés suivantes : la restriction de h à E$'$ est g^{-1} et le noyau de h est le noyau N de f.

PROBLÈME **4 POINTS**

On appelle F l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et E le sous-ensemble de F des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies et continues sur $\mathbb{R}$.
On considère l'application de E dans F qui à la fonction f de E fait correspondre la fonction g définie pour tout x réel par :

$$g(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

g sera appelée la transformée de f.

Partie A

L'objet de cette partie est l'étude des transformées de fonctions f particulières. Les quatre questions qui constituent cette partie sont indépendantes.

1. On prend $f(x) = |x|$; définir, pour tout x, $g(x)$.
2. On prend $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   a. Définir g.
   b. Etudier les variations de g et tracer la : courbe (C) représentant ces variations dans un repère orthonormé. Préciser les branches infinies de (C).

3. On pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

a. Définir g.

b. Démontrer que la courbe (Γ) représentant en repère orthonormé les variations de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$ est une partie d'une conique (H). Préciser les éléments géométriques de (H) (centre, sommets, foyers, directrices, excentricité, asymptotes éventuelles). Tracer (H) et (Γ) sur le même dessin.

4. On pose maintenant $f_0(x) = \sin x$ et $f_n(x) = x^n \sin x, \quad n \in \mathbb{N}^\star$.

La transformée de f_n sera notée g_n $(n \in \mathbb{N})$.

En faisant deux intégrations par parties, trouver une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-2}(x)$.

Calculer $g_0(x)$; en déduire $g_2(x)$.

Partie B

1. **a.** Montrer que pour toute fonction f appartenant à E, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. On notera alors φ l'application de E dans E définie par $\varphi(f) = g$.

b. On sait que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'application φ de E dans E qui à f associe g est un endomorphisme de E.

2. Montrer que g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x. En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que g' est dérivable au point 0.

3. f étant positive sur $\mathbb{R}_+$, démontrer que si f est paire ou impaire, il en est de même pour g. On pourra utiliser les propriétés de symétrie de la courbe représentant, en repère orthonormé, les variations de la fonction F définie par $F(x) = xf(x)$ et interpréter géométriquement les nombres $g(x)$ et $g(-x)$.