

œ Baccalauréat C Lyon juin 1978 œ

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$13x - 84y = 7$$

2. Déterminer les solutions $(x; y)$ de cette équation telles que x et y soient premiers entre eux (on pourra montrer que si $(x; y)$ est une solution de l'équation le PGCD de x et y est 1 ou 7).

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans un plan affine euclidien P on considère trois points A, B et C tels que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit un repère orthonormé direct.

Soit t un nombre réel quelconque; on désigne par I_t le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $2t^2 - t, t, 1 - t^2$.

L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des barycentres I_t lorsque t décrit \mathbb{R} .

On désigne par f l'affinité orthogonale de rapport 2 et dont l'axe contient les points A et C .

1. Montrer que l'image $f(E)$ de l'ensemble E par l'application f est inclus dans un cercle (Γ) de centre A dont on précisera le rayon.
2. Soit D le point symétrique du point C par rapport à A . On désigne par $(\Gamma) \setminus \{D\}$ l'ensemble des points du cercle (Γ) qui sont distincts du point D ; montrer que l'on a $f(E) = (\Gamma) \setminus \{D\}$.
3. En déduire la nature de l'ensemble E et le représenter graphiquement (on prendra 8 cm pour unité de longueur).

On rappelle que l'affinité orthogonale d'axe D et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est la transformation qui associe à chaque point M du plan, le point M' tel que

$\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H désigne l'image de M par la projection orthogonale sur la droite D .

PROBLÈME

11 POINTS

Pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$ on désigne par f_λ la fonction de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes dans lui-même qui associe à tout nombre complexe z le nombre complexe $Z = f_\lambda(z)$ satisfaisant à l'équation :

$$Z - i\lambda = \frac{i}{\lambda}(z - i\lambda).$$

Dans un plan affine euclidien orienté P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on note F_λ l'application affine qui associe à tout point m d'affixe z le point M d'affixe $Z = f_\lambda(z)$.

Partie A

1.
 - a. Montrer que F_λ est une bijection et déterminer l'application réciproque F_λ^{-1} .
 - b. Montrer que F_λ admet un unique point invariant S_λ . Calculer ses coordonnées.

2. a. Pour $m \neq S_\lambda$, exprimer en fonction de λ le rapport $\frac{S_\lambda M}{S_\lambda m}$, ainsi que la mesure de l'angle $(\overrightarrow{S_\lambda m}, \overrightarrow{S_\lambda M})$.
- b. En déduire la nature de l'application F_λ et préciser ses éléments caractéristiques. Pour quelle valeur de λ l'application F_λ est-elle une rotation ?

Partie B

1. Pour tout point m de coordonnées $(x; y)$ on note par $(X; Y)$ les coordonnées du point $M = F_\lambda(m)$.
- a. Calculer X et Y en fonction de x et y .
- b. Soit A le point de P de coordonnées $(1; 1)$; donner une équation de l'ensemble des points de la forme $F_\lambda(A)$ lorsque λ décrit \mathbb{R} .
2. a. Étudier la fonction numérique

$$x \mapsto 1 - x + \frac{1}{1 - x}.$$

- et construire sa courbe représentative (Γ) dans le repère donné. Préciser ses asymptotes et son centre de symétrie Ω .
- b. Soit a un nombre réel, $a \geq 2$; calculer l'aire arithmétique de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) , son asymptote oblique et les droites d'équation $x = 2$ et $x = a$. Quelle est la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$?
- c. Établir une équation de la courbe (Γ) dans un repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, \vec{I} et \vec{J} étant des vecteurs convenablement choisis dirigeant respectivement chacune des deux asymptotes de (Γ) .
En déduire la nature de la courbe (Γ) .

Partie C

1. Soit φ l'application qui à tout nombre réel $\lambda \neq 0$ associe le point $F_\lambda(A)$ de P . Montrer que φ est une bijection de \mathbb{R}^* sur (Γ) .
2. Pour tout couple $(\lambda_1; \lambda_2)$ de nombres réels non nuls on désigne par $M_1 = \varphi(\lambda_1)$, $M_2 = \varphi(\lambda_2)$ leurs images respectives et par $M_1 \star M_2 = \varphi(\lambda_1 \lambda_2)$ l'image par φ du produit $\lambda_1 \lambda_2$.
Montrer que (Γ, \star) est un groupe commutatif.
On notera E son élément neutre.
3. Dans cette question, on note par M_3 le point $M_1 \star M_2$.
- a. On suppose les points M_1 et M_2 distincts.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EM_3}$ et $\overrightarrow{M_1 M_2}$ sont colinéaires.
- b. On suppose les points M_1 et M_2 confondus. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EM_3}$, lorsqu'il n'est pas nul, dirige la tangente à Γ au point M_1 .
- c. En déduire une construction géométrique de M_3 à partir de M_1 et M_2 . On justifiera à l'aide d'une équation de (Γ) que l'intersection de la courbe (Γ) avec une droite quelconque Δ se compose de deux points au plus.