Baccalauréat C Maroc–Tunisie juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Déterminer l'ensemble $A\,(A \subset \mathbb{Z})$ des entiers relatifs m tels que m^2+m+1 soit divisible par 13.
(On conseille de résoudre au préalable dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $u^2+u+1=0$).
2. Déterminer l'ensemble $B\,(B \subset \mathbb{Z})$ des entiers relatifs n tels que n^2+n+1 soit divisible par 169.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

La lettre t désigne le temps. Dans un plan euclidien rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les points mobiles M_1 et M_2 sont définis par leurs coordonnées à l'instant t :

$$M_1\left|\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & \cos t\\ y_1(t) & = & t-\sin t\end{array}\right. \qquad M_2\left|\begin{array}{lcl} x_2(t) & = & 1-\dfrac{t^2}{4}\\ y_2(t) & = & t-\dfrac{t^2}{4}\end{array}\right.$$

Le mouvement de chaque point commence à l'instant $t=0$, et on considère qu'il cesse quand le point atteint l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$.

1. Donner les durées des deux mouvements.
Déterminer les vecteurs vitesses $\overrightarrow{\text{V}_1}$ de M_1 (resp. $\overrightarrow{\text{V}_2}$ de M_2) à l'instant t de leurs déroulements respectifs.
2. Établir une relation indépendante du temps entre l'abscisse du mobile M_1 et le carré de la vitesse. Même question pour M_2.
3. Montrer que les deux mouvements satisfont, à chaque instant de leur déroulement respectif, la relation :
$$\vec{\text{V}}\cdot\left(\vec{\Gamma}+\vec{\imath}\right)=0,$$
où $\vec{\text{V}}$ désigne le vecteur vitesse et $\vec{\Gamma}$ le vecteur accélération.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Un plan affine euclidien Π est rapporté au repère cartésien orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On désigne par Δ la droite d'équation $y=-1$.
Soit $\Pi^\star$ l'ensemble des points de Π dont aucune coordonnée n'est nulle, et T la transformation de $\Pi^\star$ ainsi définie :
Si M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$, $\mu=T(M)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{y}{x}\,;\,y\right)$.

1. Vérifier que T est involutive, et que si M et μ sont associés par T, $\overrightarrow{\text{O}\mu}$ et $\overrightarrow{\text{O}N}$ sont orthogonaux, N désignant la projection orthogonale de M sur Δ.
2. Soit $\mathcal{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas zéro, φ une bijection involutive de $\mathcal{J}$, et (γ) l'arc de courbe admettant relativement au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ l'équation $y=x\varphi(x), \quad x\in\mathcal{J}$.
Démontrer que (γ) est globalement invariant par T.

3. Exemple :

a. Étudier les variations de la fonction numérique :

$$x \longmapsto h(x) = x\sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$$

b. Préciser l'intervalle $\mathcal{J}$, la bijection φ s'explicitant ici par

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{3-x^2}{1+x^2}}.$$

c. Tracer avec soin l'arc (γ) correspondant.

Partie B

On s'intéresse désormais à la courbe C du plan Π qui admet relativement au repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ l'équation : $y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$.
On pose $C^\star = C - \{\mathrm{O}\}$.

1. Montrer que la transformée de $C^\star$ par T est incluse dans un cercle.
Sur une même figure, tracer ce cercle et construire C.
On pourra, en cas de besoin, s'aider des variations de la fonction :

$$g : x \longmapsto \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

2. On joint le point M de C d'abscisse x au point M' de C d'abscisse x' ($x' \neq x$). Former le coefficient directeur de la droite MM' et celui de la tangente en M à C. Montrer que M' est sur la tangente en M si et seulement si on a la relation :

$$x' + \frac{x^2-1}{2x}x = 0.$$

On se propose de manipuler, dans la suite, les couples $\left(x\ ;\ x'\right)$ de cette relation (y compris, abusivement, ceux pour lesquels $x = x'$) en les « paramétrant » : $x = \operatorname{cotg} u$, $x' = \operatorname{cotg} v$.

3. Soit l'intervalle réel $J =]0\ ;\ \pi[$.

a. Montrer que la relation

$$\operatorname{cotg} v + \operatorname{cotg} 2u = 0$$

où $(u\ ;\ v) \in J \times J$, définit une fonction $f_1 : u \longmapsto v = f_1(u)$ de J dans lui-même ; cette fonction est affine par morceaux ; préciser son ensemble de définition et tracer sa représentation graphique.

b. On pose $f_2 = f_1 \circ f_1$, $\quad f_3 = f_1 \circ f_1 \circ f_1$, etc. (où le symbole $\circ$ désigne la composition des fonctions) ; préciser les ensembles de définition de f_2, de f_3 et tracer séparément leurs représentations graphiques.
Établir que, si t est un réel non entier de l'intervalle $]0\ ;4[$ et $\mathrm{E}(t)$ la partie entière de ce réel, on a :

$$f_2\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \pi \cdot [t - \mathrm{E}(t)].$$

c. Pour cette dernière question on admet que tout réel de l'intervalle $]0\,;\,1[$ peut être représenté, en base quatre, par un développement

$$0,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_i,\, \cdots \quad \left(a_1 \cdot \frac{1}{4} + a_2 \cdot \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$

où chaque chiffre a_i est élément de l'ensemble $\{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$.
Soit p un entier naturel fixé, et $\mathscr{F}$ la famillee des intervalles

$$\left]k\frac{\pi}{4^p}\,;\,(k+1)\frac{\pi}{4^p}\right[, \quad k\,\text{entier}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 4^p.$$

À partir d'un réel $\alpha \in J$, on forme la suite (lorsqu'elle existe) $n \longmapsto \alpha_n$ dont les termes sont :

$$\alpha_1 = f_1(\alpha),\, a_2 = f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha), \cdots, \alpha_n = f_1(\alpha_{n-1}), \cdots$$

Peut-on choisir α pour que cette suite ait un terme au moins dans chaque intervalle de $\mathscr{F}$?