Baccalauréat C Nantes juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante d'inconnue x :

$$3x^2 + 4x \equiv 0 \quad [\text{modulo } 21].$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24\text{i}.$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer a et b sachant que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1) & = & -44 + 32\text{i} \\ f(-1) & = & -30 + 16\text{i}. \end{array}\right.$$

2. On suppose, dans cette question, que : $a = 5$ et $b = -8 + 8\text{i}$.
Démontrer qu'il existe un réel r, et un seul, tel que $f(r) = 0$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ alors l'équation (E) d'inconnue z :

$$f(z) = 0. \qquad \text{(E)}$$

On appelle z_1, z_2 et z_3 les solutions de (E) ; on note Z le complexe

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.$$

Calculer Z. Déterminer le module et un argument de Z.

PROBLÈME **4 POINTS**

La partie C du problème est indépendante des parties A et B

Partie A

Soit $\mathscr{E}$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois dont une base orthonormée directe est $\mathscr{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ (application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$) défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi\left(\vec{\imath}\right) & = & \vec{k} \\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) & = & -\vec{\jmath} \\ \varphi\left(\vec{k}\right) & = & \vec{\imath} \end{array}\right.$$

Démontrer que φ est une isométrie vectorielle involutive de $\mathscr{E}$.
Déterminer $\varphi(\vec{\imath} + \vec{k})$ et $\varphi(\vec{\imath} - \vec{k})$.
Caractériser φ.

2. Soit Ψ le demi-tour vectoriel de $\mathscr{E}$ (symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle) dont l'axe est la droite vectorielle de base $\left(\vec{\imath}\right)$.
On désigne par θ l'endomorphisme $\varphi \circ \Psi$ de $\mathscr{E}$.

a. Déterminer $\theta\left(\overrightarrow{\imath}\right)$, $\theta\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\theta\left(\overrightarrow{k}\right)$.

b. Démontrer que θ est une rotation vectorielle dont l'axe $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle de base $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan vectoriel orthogonal à $\mathcal{D}$. Dans la suite du problème le plan $\mathcal{P}$ sera orienté : $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}\right)$ est une base orthonormée directe ; la droite vectorielle $\mathcal{D}$ est alors orientée : $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$ est une base directe.

Donner une mesure de l'angle de la rotation vectorielle θ d'axe $\mathcal{D}$ orienté.

Partie B

Soit E un espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}$; il est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit f l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme φ et qui transforme le point O en le point A de coordonnées (2 ; 0 ; 2).
   a. Définir analytiquement f.
   b. Démontrer que f est un vissage et que f est la composée, dans un ordre indifférent, d'un demi-tour affine (un demi-tour affine est également appelé un retournement) et d'une translation t ; préciser l'axe du demi-tour affine et le vecteur de la translation.
2. Soit g l'application affine de E vers E qui est associée à l'endomorphisme ψ et qui laisse le point O invariant.
   Caractériser g.
3. Soit h l'application affine de E vers E définie par $h = f \circ g$.
   a. Démontrer que $h = t \circ r$, où t désigne la translation définie au B 1. b. et r une rotation affine, dont on précisera l'axe (D).
   b. On désigne par (P) le plan affine qui contient O et dont la direction est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ précédemment défini.
   Démontrer que (P) est globalement invariant par h.
   c. On note h' la restriction de h à (P).
   Définir analytiquement h', (P) étant rapporté au repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}\right)$.
   Démontrer que h' est une rotation affine, dont on précisera le centre I et une mesure de l'angle.
   d. Démontrer que h est une rotation affine, dont on précisera l'axe (D$'$).
   La direction de (D$'$) est orientée par le choix de la base directe $\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$: donner une mesure de l'angle de la rotation h.
4. On conserve l'orientation de la droite affine (D$'$).
   Soit alors W le vissage dont l'axe est (D$'$), dont l'angle admet pour mesure α, dont le vecteur est $-\alpha\overrightarrow{\jmath}$.
   À un point M quelconque, de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$, W associe le point $M' = W(M)$ de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\,;\ z'\right)$.
   Établir que l'on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos\alpha + z\sin\alpha - 2\sin\alpha,\\ y' &=& y-\alpha,\\ z' &=& -x\sin\alpha + z\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2.\end{array}\right.$$

Partie C

1. Soit u l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u :\ t \longmapsto u(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{Log}\, t.$$

Démontrer que u est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit v l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$v :\ t \longmapsto v(t) = t^2\mathrm{e}^t - 1.$$

Étudier les variations de la fonction v.

3. u'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction u. Démontrer que, dans $\mathbb{R}_+^\star$, l'équation $u''(t) = 0$ admet une solution unique t_0 et que l'on a $\dfrac{1}{2} < t_0 < 1$.
Étudier le signe de $u''(t)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Partie D

Dans l'espace affine euclidien E, on considère le point mobile N dont les coordonnées, dans le repère $\mathscr{R}$, sont à l'instant t $\left(t \in \mathbb{R}_+^\star\right)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos u(t),\\ y & = & u(t),\\ z & = & 2 + \sin u(t).\end{array}\right.$$

On désigne par (C) la trajectoire de N.

1. Démontrer que la projection orthogonale de (C) sur le plan (P) défini au B. 3. b. est un cercle, que l'on précisera.

2. Quelles sont les coordonnées, à l'instant t, du point $W(N)$? En déduire que, à tout instant t $\left(t \in \mathbb{R}_+^\star\right)$, $W(N)$ est un point de (C).

3. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ du point mobile N à l'instant t.

4. Étudier le sens de variation de la fonction numérique qui, au réel strictement positif, t associe $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$.