# Baccalauréat C Nice septembre 1978

**EXERCICE 1** **3 POINTS**

Soit $\mathcal{E}$, un plan affine rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right) = \mathcal{R}$.
Soit D la droite d'équation $x + y - 1 = 0$,
et $\Delta$ la droite d'équation $x - y - 1 = 0$.
Soit $M$ un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point $M'$ image du point $M$ dans la symétrie orthogonale $s$ par rapport à la droite D.
2. Déterminer les coordonnées $\left(x''\ ;\ y''\right)$ du point $M''$ image du point $M$ dans la symétrie orthogonale $\sigma$ par rapport à la droite $\Delta$.
3. Soit $f = \sigma \circ s$. Quelle est la nature de $f$ ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

**EXERCICE 2** **3 POINTS**

1. Établir la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Résoudre les équations :
   **a.** $x^2 = 0$ ;
   **b.** $x^2 = x$ ;
   **c.** $\dot{3}x = \dot{0}$.
   où $x$ est élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Résoudre le système dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{2}x - \dot{4}y & = & \dot{2} \\ x + \dot{5}y & = & \dot{2} \end{array}\right.$$

**PROBLÈME** **13 POINTS**

On désigne par « $a$ » un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, et on considère la fonction numérique $f_a$ définie par

$$f_a(x) = \mathrm{Log}\left(x^2 - 2x\cos a + 1\right).$$

On appelle $(\mathcal{C}_a)$ la représentation graphique de $f_a$ dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

**Partie A**

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f_a$ suivant les valeurs de « $a$ ».
2. Trouver les limites, quand $x$ tend vers $+\infty$,de $f_a(x)$ et de la fonction : $x \longmapsto f_a(x)$.
3. **a.** Montrer que $(\mathcal{C}_a)$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \cos a$.
   **b.** Montrer que $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{\pi - a})$ sont symétriques par rapport à la droite $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   **c.** $a$ et $a'$ étant deux réels distincts de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_a)$ et de $(\mathcal{C}_{a'})$.
4. **a.** Étudier les variations de $f_0$ et tracer $(\mathcal{C}_0)$.
   **b.** En déduire $(\mathcal{C}_\pi)$.

**5.** **a.** Quand « a » est différent de 0 et de $\pi$, étudier les variations de $f_a$.

**b.** Tracer ensuite $(\mathscr{C}_a)$ pour $a = \dfrac{\pi}{3}$.

**Partie B**

Soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}^\star$.

**1.** **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 1 = 0$.

**b.** Soit $z_k$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{k\pi}{n}$, où $k$ appartient à $\mathrm{I} = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 2n-1\}$.
$k$ appartenant à $\mathrm{I} - \{0,\ n\}$,soit $k'$ tel que $k + k' = 2n$ ; à quel ensemble appartient alors $k'$ ?
Montrer que le polynôme $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ a des coefficients réels que l'on déterminera en fonction de $k$ et $n$.

**c.** On admettra que :

$$\forall z,\ z \in \mathbb{C},\quad z^{2n} - 1 = (z - z_0)(z - z_1),\dots,(z - z_k)\dots(z - z_{2n-1}).$$

En utilisant b. montrer que $z^{2n} - 1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels.

**2.** On considère $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$ où $x$ est un réel et où

$$f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \mathrm{Log}\left(x^2 - 2xcos\frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

**a.** Montrer que $S_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déduire de B 1. c. que si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$S_n(x) = \mathrm{Log}\,\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}.$$

**c.** En déduire alors $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

**3.** $x$ étant un réel fixé, différent de 1 et de $-1$, on considère la fonction $g_k$ telle que :

$$g_x(t) = \mathrm{Log}\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)$$

pour $t$ appartenant à $[0\ ;\ \pi]$.

**a.** Vérifier que $g_x$ est bien définie sur $[0\ ;\ \pi]$, et qu'elle est intégrable sur $[0\ ;\ \pi]$.

**b.** Comparer $S_n(x)$ à une somme de Riemann de la fonction $g_x$.

**c.** En déduire la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\,\mathrm{d}t.$$