Baccalauréat C Nouméa novembre 1978

EXERCICE 1

On considère la fonction f de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} - 2.$$

1. Étudier la variation de f.
2. Construire la représentation graphique de la fonction f, dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'axes O$x$ et Oy.

   On prend $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 1$ centimètre.
3. Calculer l'aire du domaine D, ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan P tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 2 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

   En donner une valeur approchée à 0,01 près. On indique que :

$$0,693 < \text{Log}\,2 < 0,694.$$

EXERCICE 2

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit f l'application de P dans lui-même qui, au point $M(x\ ;\ y)$, associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\right)$ défini par :

$$x' = \frac{7x + y}{8} \quad ; \quad y' = \frac{x + 7y}{8}.$$

On appelle (C) le cercle de centre O et de rayon 4, et (C') l'image de (C) par f.

1. Déterminer l'équation de (C), puis celle de (C'), dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Soient $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les vecteurs définis par :

$$\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right) \quad ; \quad \vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).$$

   Déterminer l'équation de (C') dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   Reconnaître la nature de la courbe (C'). Tracer avec soin la courbe (C).

PROBLÈME

Dans tout ce problème, Log désigne la fonction logarithme népérien.
On donne les encadrements suivants :

$$\begin{array}{ccccc} -0,5109 & < & \text{Log}\,0,6 & < & -0,5108 \\ -0,3567 & < & \text{Log}\,0,7 & < & -0,3566 \\ -1,2040 & < & \text{Log}\,0,3 & < & -1,2039 \\ -0,9163 & < & \text{Log}\,0,4 & < & -0,9162 \end{array}$$

1. Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$h(x) = x^2 + \text{Log}\, x.$$

a. Étudier la variation de h.

b. Démontrer qu'il existe un nombre réel α, unique, tel que : $h(\alpha) = 0$.

c. Démontrer que : $0,6 < \alpha < 0,7$.

2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$g(x) = x^2 + (\text{Log}x)^2.$$

a. Étudier la variation de g.

b. Vérifier que : $g(\alpha) < 1$.

c. Démontrer que l'équation : $g(x) = 1$, admet, en plus de la racine 1, une racine β, telle que : $0,3 < \beta < 0,4$.

d. Tracer la courbe représentative (C) de g, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'axes O$x$ et Oy.

II

1. Soit E un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, rapporté à une base orthonormée $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout nombre réel m strictement positif on associe l'endomorphisme φ_m de E, dont la matrice A_m relativement à la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, est :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & \text{Log}m \\ \text{Log}m & -m \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que φ_m est une bijection de E sur E.

b. L'endomorphisme φ_m peut-il être une homothétie vectorielle de E ?

c. Démontrer que φ_m est une symétrie orthogonale, si, et seulement si, $m = 1$ ou $m = \beta$.

Donner alors, dans chacun de ces cas, l'axe de la symétrie.

2. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, associé au plan vectoriel euclidien E, et rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. m est un nombre réel strictement positif donné.

On note Ω_m le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(m-1\,;\, Logm)$.

Soit f_m l'application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même, associée à l'endomorphisme φ_m de E, et telle que $f_m(\text{O}) = \Omega_m$.

a. Donner une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points Ω_m quand m décrit l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Dessiner soigneusement (Γ).

Démontrer que Ω_β est aussi sur le cercle de centre $I(-1\,;\,0)$, et de rayon 1.

b. Démontrer que les coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ du point $M' = f_m(M)$ sont données en fonction des coordonnées $(x\,;\,y)$ du point M, par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'+1 & = & m(x+1) + y\text{Log}m \\ y' & = & (x+l)\text{Log}m - my \end{array}\right.$$

Vérifiez que le point $I(-1\,;\,0)$ est invariant par f_m.

c. i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

À tout point $M(x\,;\ y)$ de $\mathcal{E}$, on associe son affixe $Z = x + \mathrm{i}y$. Soit Z' l'affixe de $M' = f_m(M)$, quand Z est l'affixe de M.

Démontrer qu'il existe deux nombres complexes a et b, que l'on déterminera, tels que : $Z' = a\overline{Z} + b$.

($\overline{Z}$ désigne le nombre complexe conjugué de Z).

d. Préciser alors la nature de f_m : on démontrera que f_m est une symétrie orthogonale si $m = 1$ ou si $m = \beta$, et une similitude inverse si $m \neq 1$ et $m \neq \beta$.

Dessiner, en utilisant les points I, 0 et Ω_β, les axes des symétries f_1 et f_β.

Dans le cas général ($m \neq 1$ et $m \neq \beta$), en utilisant les points I, O et Ω_m indiquer comment on peut définir sur le dessin les éléments caractéristiques de f_m.