Baccalauréat C Orléans-Tours septembre 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Calculer la somme

$$S_k = 1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}^\star.$$

2. Exprimer le nombre qui s'écrit en base 10, $\overline{ababab}$, à l'aide du nombre $\overline{ab}$ et de puissances de 10.
3. En déduire la somme $29 + 2\,929 + 292\,929 + \cdots + \underbrace{2929...29}_{n \text{ fois } 29}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit f la fonction réelle de variable réelle, telle que :

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f, et construire la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que cette courbe admet un centre de symétrie I, dont on précisera les coordonnées.
2. En déduire l'aire du domaine E du plan affine euclidien, ensemble des points M de coordonnées x et y, telles que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant y \leqslant f(x).$$

PROBLÈME **4 POINTS**

On appelle E le plan vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, et P le plan affine euclidien, associé à E rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
$\mathscr{L}(\text{E})$ étant l'ensemble des endomorphismes de E (applications linéaires de E dans E), on rappelle que :

$\mathscr{L}(\text{E})$, muni de l'addition et de la loi externe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,

$\mathscr{L}(\text{E})$, muni de l'addition et de la loi de composition des applications (notée $\circ$), est un anneau unitaire

et que, quels que soient le réel α et les endomorphismes f et g de E on a :

$$(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g).$$

On notera e l'application identique de E dans E.

Partie A

Soit φ un endomorphisme de E tel que $\varphi^2 = -\text{e} \quad \varphi^2 = \varphi \circ \varphi)$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall \overrightarrow{u} \in \text{E}, \quad \varphi^2\left(\overrightarrow{u}\right) = -\text{e}\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}.$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ si et seulement si : $a + d = 0$ et $a^2 + bc = -1$.

2. Montrer que φ est une application bijective de E dans E. Exprimer l'application réciproque φ^{-1} de φ en fonction de φ.
3. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul de E, montrer que $\left(\overrightarrow{u}\,, ;\ \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est une base de E.

   Quelle est la matrice de φ dans cette base ?
4. Exprimer en fonction de φ ou de e l'endomorphisme φ^n pour tout entier naturel n. (On posera $\varphi^0 = \text{e}$ et $\varphi^1 = \varphi$.

   Déterminer les éléments de $H = \left\{\varphi^n ; n \in \mathbb{N}\right\}$.

   Montrer que H est un groupe pour la loi $\circ$ de composition des applications, isomorphe au groupe multiplicatif

$$H' = \left\{\text{i}^n ; n \in \mathbb{N}, \quad (\text{i}^2 = -1)\right\}.$$

5. Soit Φ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\text{E})$ constitué par l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments e et φ où φ est un endomorphisme donné tel que $\varphi^2 = -\text{e}$.
   a. Montrer que les endomorphismes e et φ sont linéairement indépendants.

   b. Soit h l'application linéaire de $\mathbb{C}$ dans Φ définie par

$$h(1) = \text{e} \quad h(\text{i}) = \varphi$$

   (1 ; i) étant la base canonique de $\mathbb{C}$ espace vectoriel des nombres complexes.

   Montrer que h est bijective.

   c. Montrer que Φ est stable pour la loi $\circ$, loi de composition des applications.

   d. En déduire que h est un homomorphisme de $(\mathbb{C}, \times)$ dans $(\Phi, \circ)$ et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ et $(\Phi, +, \circ)$ sont deux corps isomorphes.

   e. Déterminer les couples de nombres réels $(\alpha ; \beta)$ tels que $(\alpha\text{e} + \beta\varphi)^6 = \text{e}$.

Partie B

Soit $f : \begin{array}{ccc} \text{P} & \rightarrow & \text{P} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$ l'application affine qui au point M de coordonnées x et y dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ associe le point M' $(M' = f(M))$ dont les coordonnées dans le même repère sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x - 2y + 2 \\ y' & = & x - y + 1 \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une application bijective dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi^2 = -\text{e}$.

   Montrer que f n'admet qu'un seul point invariant A dont on précisera les coordonnées.
2. Démontrer qu'il existe deux droites affines D passant par A telles que D soit perpendiculaire à son image $f(\text{D})$.
3. On prend $M = M_0$ et on note $M_n = f\left(M_{n-1}\right)$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

   a. Montrer que l'ensemble des points M_n ainsi définis est réduit à quatre points si $M_0 \neq \text{A}$.

   b. Montrer que les quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 sont les sommets d'un parallélogramme dont on précisera le centre.

c. Déterminer, en utilisant les résultats de la question B 2., l'ensemble des points M_0 pour que ce parallélogramme soit un losange.

d. Ce parallélogramme peut-il être un carré ?

4. Soit (C) la courbe qui, dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ a pour équation

$$x^2 - 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$$

a. Préciser la nature de (C), donner ses éléments caractéristiques et construire (C) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Déterminer l'équation de la courbe $(C') = f((C))$. Préciser la nature de (C'), donner ses éléments caractéristiques et la construire dans le même repère que (C).

c. Les courbes (C) et (C') ont les mêmes asymptotes Δ_1 et Δ_2. Déterminer l'image par f du couple Δ_1 ; Δ_2.